هو

اصول هندسه

انشاء از مقرب الخاقان

اقا میرزا عبد الغفار

نجم الملک سرتیپ مهندس و معلم کل

و مؤلف علوم ریاضی

در مدرسه

مبارکه نظامیه دار الفنون

طهران

سنه ۱۲۹۲

بسم الله الرحمن الرحیم

الحمد لله رب العالمین * والصلوة والسلام علی محمد وآله اجمعین
وبعد پوشیده نیست که از آنگاه که تاج وتخت خسروی بفرق فرقدسای
وقدم عالم آرای مالک الملوک وسلطان السلاطین خدیو خدیوان کامکار
اعلیحضرت اقدس شهریار جمشید زمان سایه یزدان السلطان بن السلطان
والخاقان بن الخاقان ناصر الدین شاه قاجار خلد الله ملکه ودولته
مباهی ومزین گردیده دولت را نظامی تازه ومملکت را نسقی بی اندازه حاصل شده
بقسمیکه همه چیز را تفاوت وتوفیر معلوم است خاصه علوم را که در عهد رسوم
دارسه ودر شمار آثار طامسه بود وبیشتر همت این خسرو والا نهمت از اول دولت
روزافزون احیا وتجدید این مراسم واعلا وتشیید این معالم بوده وهست
چنانچه تفویض منصب جلیل جلیل وزارت علیه بشخص اکمل وفرد اوحد نواب مستطاب
اشرف امجد والا اعتضاد السلطنه علیقلی میرزا ادام الله مجده وبنای مدرسه
مبارکه دار الفنون وکثرت معلمین مجد ومتعلمین مستعد وبذل مبالغ خطیره همه سال
در این راه هریک بی اشتباه شاهدی عدل وگواهی امین است منت چه صنف

تو خود میباشند و چون بمقتضای ارادهٔ علیهٔ همایونی و مساعی جمیلهٔ وزیر علوم و تجارت
و فواید مقرب الخاقان جعفرقلیخان در ترویج و پرورش و موهبت تامهٔ مقرب الخاقان محمد حسین خان
سرتیپ ناظم این اوقات جمیع فنون خاصه ریاضی زاید الوصف و ایراست و مدد
سایر فنون و صنایع بر مقدمات است خاصه بر علم حساب و هندسه

لهذا حقیر جانی ابن الفاضل الکامل علی محمد عبد الغفار اصفهانی محض ادای
شکر نعمت و استرضای خاطر ملوکی مظاهر خسروانه و تقدیم خدمت در حضرت
وزارت علیه و انتفاع عموم متعلمین مدرسهٔ مبارکهٔ دار الفنون و غیرهم کتبی
در اصول فنون ریاضی باندازهٔ فکر قاصر تالیف و ترجمه نموده در اصول حساب ۱۲۸
ذکر نموده سبب تالیف آن کتب را از جملهٔ آن علوم هندسه اولی است و معروف تر
کتابی که در این علم میانهٔ ما بوده هندسهٔ اقلیدس است که در زمان مامون بن الرشید
از لغت یونانی بعربی ترجمه شد و بعد سلطان المحققین خواجه نصیر علیه الرحمه
آن را تحریر فرموده اسلوب آن کتاب بعد از وضع قانون جدید در تحصیل پسندیده
نیست چونکه در اصل کتاب اقلیدس اصول و فروع مخلوط اند و بعد از آن خواجه
علیه الرحمه در تحریر آن برای هر شکل وجه آخری ذکر فرموده اند و بلکه در اکثر اشکال
وجوه عدیده و جهت اختلاف و وقوع بسیار بیان نموده اند مانند شکل عروس که ۴۹
وجه در آن ذکر شده و چنین کتابی برای تحصیل مبتدی مناسب نیست و مقصود حقیر نه
توهین آن کتاب است ابدا بلکه اشاره بعدم مناسبت او است برای مبتدی
ولی مطالعهٔ آن برای تتبع و تصرف در براهین و وسعت خیال بسیار خوب است
بالجمله دو کتاب هم در مدرسهٔ مبارکه ترجمه شده یکی از آنها اگرچه خوش اسلوب است
ولی ناقص میباشد و حروف اشکالش فرنگی و کتاب دیگر مغشوش میباشد حقیر برای
مدرسهٔ مبارکهٔ دار الفنون دو کتاب در اصول هندسه نوشت یکی تالیفی است مبسوط

اصول و فروعش از هم ممتاز و ضمیمه دارد و مشتمل بر مسائل مفیده و رسمیه بسیار
که در مورد لزوم کافی بکار آیند و دیگر همین کتاب موجود است که اصول اقلیدس را در
چونکه اصول جمیع مطالب هندسه اولی بطریق اختصار و بعبارتی مانوس در آن درج
شده و نظر باین نکته برای مبتدی مناسب تر است و این اسلوبی است که تألیفات
چند ین تغییر و تصرف در آن شده تا باینجا رسیده و فعلاً برای تحصیل با انتظام نزد عموم
مهندسین مختار افتاده و مشتمل است بر هشت مقاله

اول در خواص خطوط و زوایا و اشکال مفرده

دویم در خواص دایره و مقیاس زوایا

سیم در خواص اشکال کثیرة الاضلاع و مساحت و تشابه آنها

چهارم در خواص اشکال کثیرة الاضلاع منظمه و مساحت دایره

پنجم در خواص اشکال فضائیه یعنی خطوط و سطوحیکه در سطحی مستوی نگنجند

ششم در خواص اجسام کثیرة السطوح

هفتم در خواص کره و متعلقاتش

هشتم در مساحت اجسام مستدیره ثلاثه یعنی کره و استوانه و مخروط

عدد اصول احکامیکه در این کتاب مبرهن شده ۴۸۳ است و عدد نتایج
و شروح و تنبیهاتی که در حقیقت احکام فرعیه اند قریب به ۱۰۰ و عدد احکام تمرین
نمودنی که بی دلیل ذکر شده ۳۰۳ و عدد مسائل حل کردنی که جوابهاشان
بیان شده ۶۵ و مجموعاً ۵۰۴ عدد باشد پس بر متعلمینیکه بخواهند مهندس
شوند اقلاً لازم است که جمیع این احکام اصلیه و فرعیه را بخاطر بسپارند اگر چه
علاوه بر آنها براهین را حفظ نکنند

تنبیه
تمام اشکال این کتاب از خود
تحریر شده و مطالب
زاده و مرتب تحقیق تمام
رو نموده و مرور ستیم
بعضی از مهندسین
متعلقین خود نگاه نمیدیم
غالب مهندسین نزدیک
تحقیق نهاده اند
اشتهار شیوع یافته
واقع شده باشد

و ترتیب این علم در علوم حسابیه بعد از اصول حساب است یا بعد از اصول جبر و مقابله

مقالهٔ اولی

در خواص خطوط و زوایا و اشکال مفرده

حدود

۱ مکان مستقر فی محدود جسم را در فضاء نامحدود این عالم حجم گوئیم

۲ حدی که مفروز میکند جسم را از فضاء محیطش سطح گوئیم

۳ محل تلاقی دو سطح جسم را خط گوئیم

۴ محل تلاقی دو خط را نقطه گوئیم

۵ بنا براین تعریفات حجم و سطح و خط بی تصور جسم وجود خارجی پیدا
نکنند ولی در هندسه اینها را قائم بالذات فرض میکنیم و غیر متعلق باجسام میکنیم بودن آنها

۶ حجم و سطح و خط را عموماً شکل گوئیم

۷ فایدهٔ علم هندسه مساحت وسعت اشکال است و معرفت نحو اصل آنها

۸ خط مستقیم خطی است غیر محدود که چون دو نقطه بر آن فرض کنیم قطعهٔ واقعه
ما بین آن دو نقطه از آن خط اقصر فاصله باشد ما بین آن دو و بعبارت اخری خطی است که
وضعش ما بین آن دو نقطه ثابت و تغیر ناپذیر باشد و ما هر جا خط مطلق گوئیم مقصود مستقیم
است و از واضحات است که اگر دو خط در جزئی از طول خود بر هم منطبق باشند در تمامی
طول البته منطبق میشوند

۹ خط منکسر و شبه کثیر الاضلاع خطی است مرکب از اجزای مستقیمه

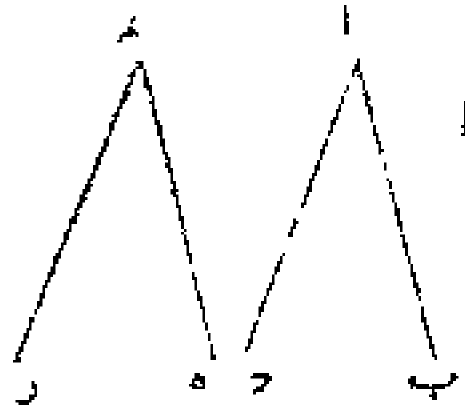
۱۰ خط منحنی آنست که نه مستقیم باشد نه مرکب از اجزای مستقیمه

۱۱ سطح مستوی آنست که چون دو نقطهٔ غیر مشخص بر او فرض شود

با چون آن دو نقطه بخطی مستقیم وصل شود تمام این خط بر آن سطح واقع شود و ما هرجا
سطح مطلق گوئیم مقصود مستوی است

۱۲ سطح منحنی آنست که نه مستوی باشد نه مرکب از اجزای مستویه

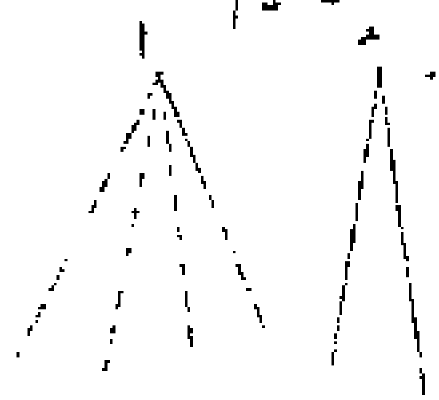
۱۳ وضع و کیفیتی که از تقاطع دو خط مستقیم
اب و اج حادث شود زاویه گوئیم
و نقطه ا راس زاویه است و دو خط
اب و اج ضلعینش



زاویه را گاه بحرف راس ا بنمائیم و گاه به حرف باج یا جاب
بنابر آنکه حرف راس در وسط افتد

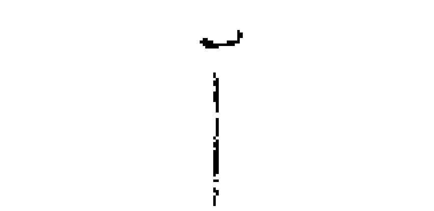
دو زاویه ا و د را متساوی گوئیم هرگاه بتوان آنها را درست بر هم منطبق
ساخت فرض بکنیم زاویه د بر ا نقل شود بروجهی که د ه بر اب واقع شود
آنوقت اگر د ز بر اج منطبق گشت دو زاویه را متساوی گوئیم

زاویه ا را گوئیم مضاعف و ثلاثه امثال و ...
زاویه د است هرگاه دو مثل این زاویه
یا سه مثلش و غیره در آن بگنجد



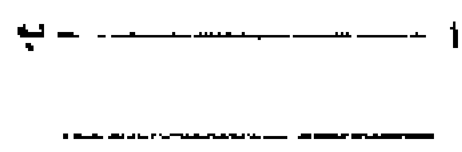
و از این قرار زوایا هم مثل سایر مقادیر مقیاس
پذیرند و میتوان آنها را بهم یکدیگر بسنجند

۱۴ هرگاه خط اب خط جد را
بروجهی تلاقی کند که دو زاویه مجاوره باج
و باد متساوی شوند خط اب را



نسبت به ج د عمود گوییم و آن دو زاویه را قائمه
و عن قریب مبرهن شود که از نقطهٔ مفروضه ا از خط ج د میتوان عمودی بر
آن خط اخراج نمود و اینکه جمیع زوایای قائمه متساوی هستند
هر زاویه که از قائمه بزرگتر باشد منفرجه‌اش گوییم و اگر کوچکتر باشد حاده
دو زاویه را متمم و تمام همدیگر گوییم هرگاه مجموعشان یک قائمه باشد
و مکمل و کمال همدیگر گوییم هرگاه مجموعشان دو قائمه باشد

١٥ دو خط واقع در سطحی را متوازی گوییم

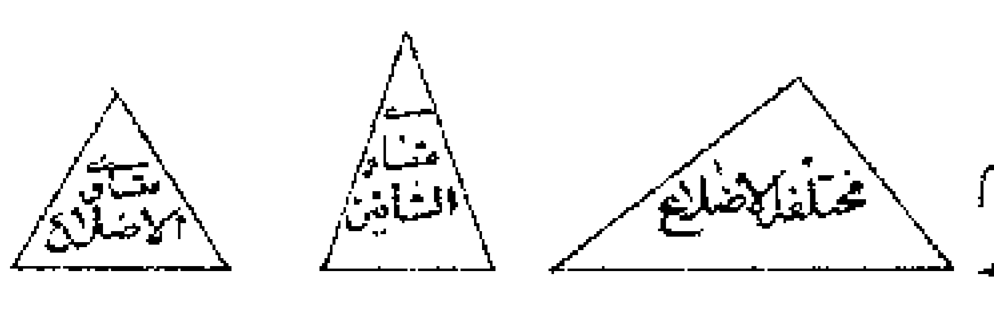


هرگاه از هیچ جهت متلاقی نشوند هرچند بی‌نهایت امتداد
داده شوند در جهتین مثل دو خط ا ب و ج د

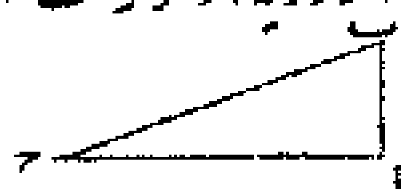
١٦ شکل مسطح سطحی است که از جوانب بخطوطی منتهی شده
پس اگر خطوط مستقیم باشند وسعت محدوده را شکل مستقیم الاضلاع و کثیر الاضلاع گوییم
و مجموع خطوط را محیط آن شکل

١٧ ساده‌ترین جمیع اشکال کثیر الاضلاع آنست که صاحب سه ضلع باشد و آن را
مثلث گوییم
و اگر دارای چهار ضلع باشد ذو اربعة اضلاع و پنج ضلعی را ذو خمسة اضلاع گویند

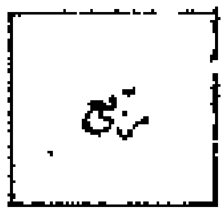
١٨ مثلث را متساوی الاضلاع گوییم هرگاه هر سه ضلعش متساوی
باشد و متساوی الساقین هرگاه دو ضلعش متساوی باشند و مختلفة
الاضلاع
اگر هیچ کدام
برابر نباشند



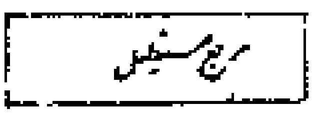
۱۹ مثلث قائم الزاویه آنست که یک زاویه‌اش قائمه باشد و ضلع مقابل آن زاویه را وتر مطلق گوئیم مثل مثلث ا ب ج و زاویه ا و وتر ب ج



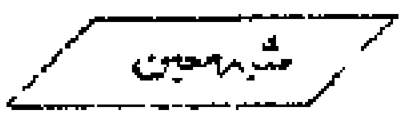
۲۰ در جمله اشکال ذوات اربعة الاضلاع مربع است یعنی شکلی است که جمیع اضلاعش متساوی باشند و جمیع زوایاش قائمه



و دیگر مربع مستطیل یا سطح و آن زوایاش قائمه و اضلاع متقابله متساوی

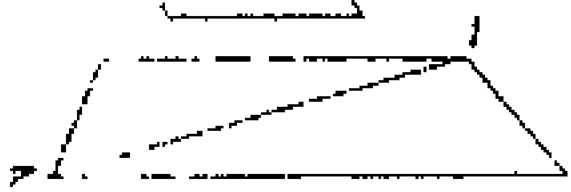


و دیگر متوازی الاضلاع یا شبیه معین و آن اضلاع متقابله‌اش متوازی باشند



و دیگر معین و آن اضلاعش متساوی باشد ولی زوایاش قائمه نباشند

و دیگری ذوذنقه است و آن دو ضلعش تنها متوازی است

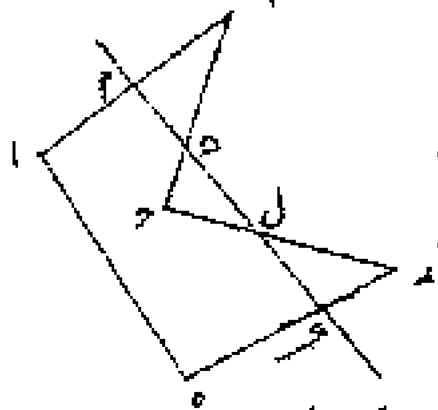


۲۱ در هر شکل قطر خطی است واصل بین دو زاویه غیر مجاوره مثل ا ج

۲۲ ذوکثیر الاضلاع متساویة الاضلاع آنست که اضلاعش متساوی باشد و متساوی الزوایا آنست که زوایایش متساوی باشند

۲۳ دو ذوکثیر الاضلاع را متساویة الاضلاع گوئیم نسبت بیکدیگر هرگاه اضلاعشان نظیر به نظیر متساوی باشند یعنی مرتب باشند بیک ترتیب بروجهی که ضلع اول یکی متساوی باشد بضلع اول دیگر و ضلع دویم بدویم و همچنین و از این وجه معنی دو ذوکثیر الاضلاع متساویة الزوایا نیز معلوم است و در این صورت هر دو ضلع متساوی یا دو زاویه متساوی را متقابله و متناظره گوئیم

۲۴. کثیرالاضلاع محدب آنست که هر ضلعش را امتداد دهیم تمام شکل در یک طرفش قرار
و محیط چنین کثیرالاضلاع را خط مستقیم بیش از دو نقطه
قطع نکند و اگر در مثل شکل ا ب ج د ه خط م ش
محیطش را بر چهار نقطه م و ن و ل و ش قطع کند
سببش اینست که مثلاً ضلع ب ج که در ما بین بر
نقطه ن قطع شده در یکطرف شکل نیفتاده یعنی آن شکل محدب نیست



تنبیه: چهار مقالهٔ اول این کتاب در اشکال سطحیات است یعنی اشکالیکه خطوطشان از یک سطح مستوی خارج نباشد

در شرح اصطلاحات و علامات

علوم متعارفه حکمی است که فی نفسه واضح باشد و احتیاج باقامهٔ دلیل نداشته باشد
قضیه حکمی است محقق که واضح نشود جز بعد از اقامهٔ دلیل و برهان
مسئله مطلبی است وارد که اقتضا کند راه جوابی را
اصول موضوعه حکمی است محقق برای برهان قضیه یا در حل مسئله آنرا استعمال کنیم
ایراد لفظی است مشترک که تعلق گیرد هم بقضیه و هم بمسئله و هم باصول موضوعه
نتیجه حکمی است مستنبط از یک ایراد یا بیشتر
شرح تنبیهی است در خصوص یک ایراد سابق الذکر یا بیشتر که از آن روی معلوم شود
رابطه و فایده و حصر و عمومیت آنها
فرض قرار دادیست در میان ایراد یا در اقامهٔ برهان
اینصورت = علامت مساوات است مثلاً ج = د یعنی ج مساوی د

اینصورت > علامت کوچکتر است مثلاً اگر بخواهیم بنمائیم که ج کوچکتر است
از د چنین مینویسیم ج > د
اینصورت < علامت بزرگتر است مثلاً ج < د یعنی ج بزرگتر است از د
علامت جمع اینست + و آنرا بعلاوه تلفظ کنیم
علامت تفریق اینست − و آنرا منها تلفظ کنیم مثلاً ج + د علامت
حاصل جمع دو مقدار ج و د است و ج − د علامت تفاضل آنها یا باقی تفریق
د از ج و همچنین ج − د + ه یا ج + ه − د باین معنی است که باید ج و ه
با هم جمع کرده د را از میزان موضوع نمود
اینصورت × علامت ضرب است مثلاً ج × د علامت حاصل ضرب ج است
در د و گاه عوض این علامت نقطه قرار دهند باینصورت ج . د و گاه هیچ علامت
قرار ندهند مثل ج د که باز بمعنی حاصل ضرب آن دو مقدار است ولی اینصورت را
بیشتر در جبر و مقابله استعمال کنیم و در جائیکه بدانیم مقصود فاصله مابین دو نقطه
ج و د باشد
اینصورت ج × (د + ه − ح) علامت حاصل ضرب ج است در جمله
د + ه − ح و اگر بخواهیم (ج + د) × (ج − د + ه) و در چنین صورت
آنچه میانه علامت جامعه نوشته شده حکم مقدار مفرد دارد
هرگاه عددی در جلو خطی یا مقداری نوشته شود حکم مضروب فیه آنخط و آن مقدار را دارد
مثلاً اگر بخواهیم بنمائیم که خط ج د باید ثلاثه امثال شود چنین مینویسیم ۳ ج د
و نصف زاویه ج را چنین مینویسیم $\frac{1}{2}$ ج
مربع خط ج د چنین نوشته شود ج د^{۲} و مکعبش چنین ج د^{۳} و این دو اصطلاح را

ج با د را ضرب کنیم
در ج − د + ه
حاصل ضرب را چنین
مینوشتیم

در مقام خود شرح خواهیم داد
باینصورت $\sqrt{}$ علامت استخراج ضلع است مثلا $\sqrt{۲}$ یعنی جذر ۲ است
و $\sqrt{ب \times د}$ یعنی جذر حاصل ضرب ب × د است یا واسطه هندسی مابین ب و د

تنبیه گاه در ضمن ادای مطلب میخواهیم تمام یعنی روابط را که مابین اشکال باشد از قبیل تشابه در اینصورت هرگاه شکلی با حروف ا و ب و ج و ... بنامیم شکل دیگر را نیز بهمان حروف بنامیم ولی با علامتی باینصورت اَ و بَ و جَ .... و تلفظ کنیم الف یک و با یک و غیره یا باینصورت اً و بً و جً و ... و تلفظ کنیم الف دو با دو جیم دو و غیره و هکذا

بسیار اتفاق میافتد که مطلبی با شکل یا بقضیه سابق تذکری حواله دهیم آنوقت باینصورت مثلا بنامیم س ۱۷ و ۳|۱۲ یعنی رجوع کنید بشکل ۱۷ از مقاله حاضره و بقضیه ۱۲ از مقاله سیم

علوم متعارفه

۱ دو مقدار مساوی با مقدار سیم متساوی باشند

۲ کل بزرگتر است از جزء خود

۳ کل مساویست با مجموع اجزای خود

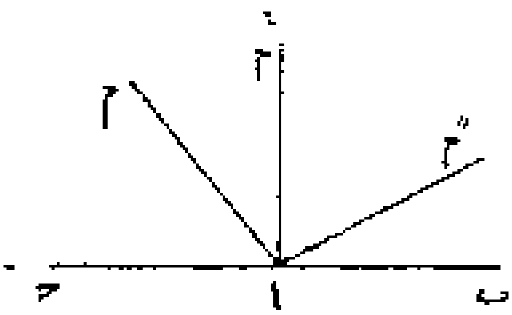
۴ مابین دو نقطه نتوان وصل نمود جز بیک خط مستقیم

۵ دو مقدار را خط باشند یا سطح یا حجم متساوی گوئیم در آنصورت که هرگاه یکی از آنها را بر دیگری قرار دهیم در تمام وسعت خود بر همدیگر منطبق شوند

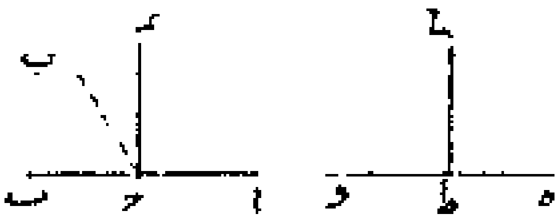
قضیهٔ اول

از نقطهٔ مفروضه بر خطی میتوان یک عمود بر آن خط اخراج نمود نه بیش

برهان فرض میکنیم خط ا م اول منطبق باشد بر ا د و بعد حول نقطهٔ ا
دوران کند و حادث نماید دو زاویهٔ مجاوره



م ا ج و م ا ب را که اولیش م ا ج
ابتدا بسیار کوچک است و متدرجا ترقی میکند
و دومینش م ا ب ابتدا بزرگتر از آن است
و متدرجا تنزل میکند تا بصفر رسد با این حرکت
زاویهٔ م ا ج که ابتدا کوچکتر بود از م ا ب زود بزرگتر میشود و از این قرار در آن
تا این موضعی برای خط متحرک پیدا میشود مثل ا م که آنجا دو زاویه متساوی باشند
و ظاهر است که بیش از یک موضع پیدا نشود



نتیجه جمیع زوایای قائمه متساوی باشند
مثلا خط د ج عمود است بر ا ب و ی ط
بر ه و و گوئیم زاویهٔ د ج ب مساوی است با
ی ط و

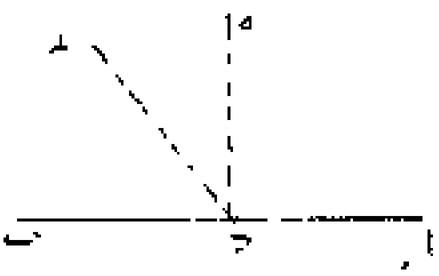
برهان خط ه و را نقل میکنیم بر ا ب چنانچه ط بر ج واقع شود
آن وقت ط ی واقع میشود بر ج د و الا لازم آید که از نقطهٔ مفروضه بر خطی میتوان
دو عمود بر آن خط اخراج نمود

قضیهٔ دویم

چون خط ج د تلاقی کند ا ب را مجموع دو زاویهٔ مجاوره ا ج د

وب ح د مساویست با دو قائمه

برهان از نقطهٔ ح عمود ح ه را بر خط اب اخراج کنیم آنوقت زاویهٔ احد مساوی میشود با مجموع دو زاویهٔ اح ه و ه حد پس احد و ب حد مساوی میشود با مجموع سه زاویهٔ

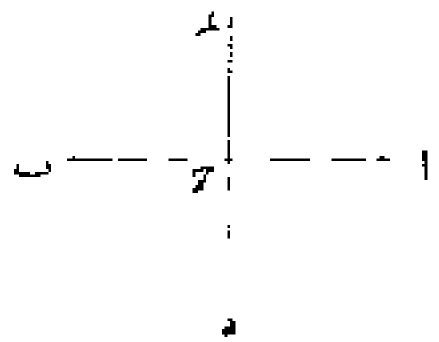


اح ه و ه حد و ب حد و زاویهٔ اول قائمه است و مجموع دو زاویهٔ دیگر نیز قائمه ب ح ه است پس مجموع دو زاویهٔ احد و ب حد بقدر دو قائمه است

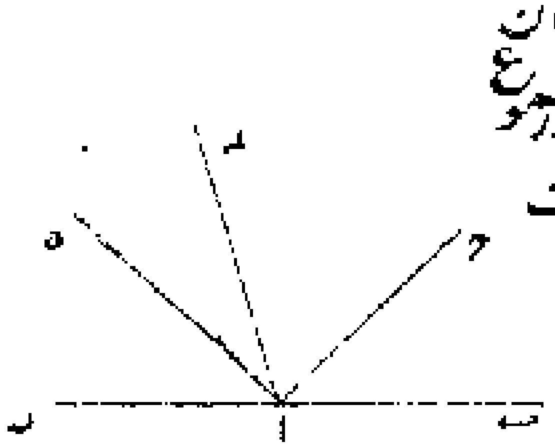
نتیجه ۱ اگر یکی از دو زاویهٔ احد و ب حد قائمه باشد دیگر نیز قائمه است

نتیجه ۲ اگر ده عمود باشد بر اب پس بعکس اب نیز عمود باشد بر آن

برهان چون ده عمود است بر اب زاویهٔ احد مساوی میشود با مجاورهٔ خود دحب و هر دو قائمه اند وچون احد قائمه شد مجاوره‌اش اح ه نیز قائمه باشد پس زاویهٔ اح ه = احد پس اب عمود است بر ده



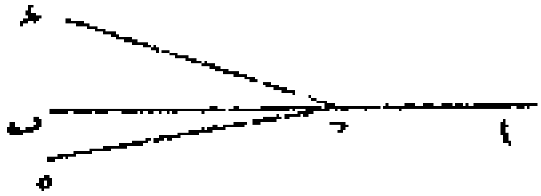
نتیجه ۳ — زوایای متقابلهٔ اح و حاد و داه و ه اب که در یک سمت خط ب د حادث گشته اند مجموعشان مساویست با دو قائمه زیرا که این مجموع بقدر مجموع دو زاویهٔ مجاورهٔ ب اح و حاد است



قضیه سیم

هر گاه مجموع دو زاویه مجاوره احد و دحب دو قائمه باشد پس
دو ضلع خارجی اح و حب بر استقامت خطی واقع میشوند

برهان اگر حب بر استقامت اح نباشد
فرض میکنیم حه بر آن استقامت باشد واقع
خط احه مستقیم است و بنابراین مجموع دو
زاویه احد و دحه دو قائمه میشود (۲)

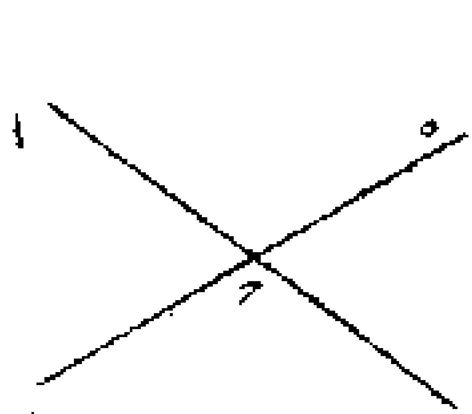


ولی بفرض مجموع دو زاویه احد و دحب
دو قائمه بود پس احد + دحب = احد + دحه و از طرفین احد را حذف
میکنیم باقی میماند دحب = دحه یعنی جزو مساوی با کل و این محال است پس حب
واقع است بر استقامت اح

قضیه چهارم

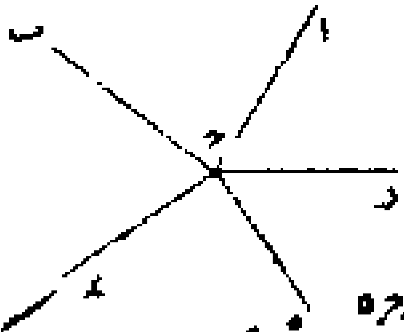
چون دو خط اب و ده متقاطع شوند دو زاویه متقابله برأس مساوی باشند

برهان چون ده مستقیم است مجموع
دو زاویه احد و احه دو قائمه باشد چون
اب مستقیم است مجموع دو زاویه احه و
بحه نیز دو قائمه است پس احد +
احه = احه + بحه و چون احه را



از طرفین اسقاط کنیم باقی میماند احد مساوی با مقابله خود بحه
و بهمین وجه ثابت میکنیم که زاویه احه مساوی است با مقابله خود بحد

شرح مجموع چهار زاویه حادثه در حول نقطهٔ تقاطع دو خط مساویست با چهار قائمه
زیرا که مجموع اجه + ب جه دو قائمه است
وکذا مجموع اجد + ب جد وکلیتاً اگر چند
خط مثل جا و جب وغیره بر نقطهٔ ج متقاطع
شوند مجموع زوایای متوالیه اجب و ب جد و دجه

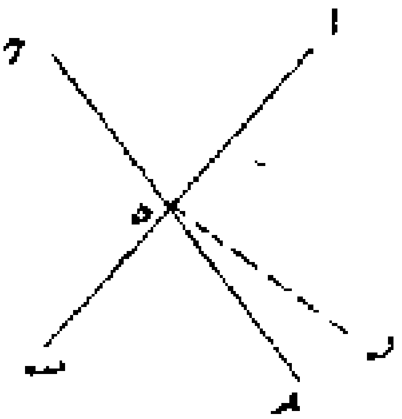


و ه ج ا مساوی میشود با چهار قائمه زیرا که اگر بر نقطهٔ ج دو خط رسم کنیم عمود بر همدیگر
حادث میشود چهار قائمه و مجموع آنها مساویست با مجموع زوایای مذکور اجب وغیره

قضیه پنجم

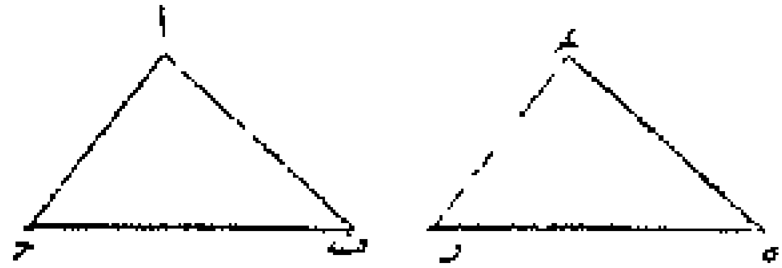
هرگاه بر نقطهٔ ه از خط اب دو خطه ج و ه د را در طرفینش چنان
رسم کنیم که دو زاویه جه ا و ب ه د متساوی شوند گوئیم ه د بر استقامت
ه ج واقع میشود

برهان فرض میکنیم ه ر بر استقامت ه ج
باشد آنوقت بنابر ق ۴ ج ه ا = ب ه ر
وبنابر فرض ب ه د = ج ه ا پس ب ه د
مساوی میشود با ب ه ر واین محال است



قضیه ششم

هرگاه دو ضلع و زاویه بینهما از مثلثی مساوی باشد با دو ضلع و زاویه
بینهما از مثلث دیگر نظیر بنظیر آن دو مثلث متساوی باشند
مثلاً زاویه ا = زاویه د وضلع اب = د ه وضلع اج = د ر میگوئیم مثلث
اب ج = د ه ر



برهان بعمل انطباق
ضلع د ه را قرار میدهیم
بر ا ب بطوریکه نقطه د
بر ا واقع شود و نقطه ه بر ب آنوقت زاویه د چون مساویست با زاویه ا ضلع
د و واقع میشود براستقامت ا ج و بفرض د و مساویست با ا ج پس
نقطه و واقع میشود بر ج و ضلع سیم ه و منطبق میشود بر ب ج و بنابراین
مثلث د ه و بر ا ب ج

نتیجه از اینکه دو مثلث سه جزء متساوی باشند زاویه ا = د و ضلع ا ب = د ه و ضلع ا ج = د و استنباط میشود که سه جزء دیگر نیز متساوی میشوند
زاویه ب = ه و زاویه ج = و و ضلع ب ج = ه و

قضیه هفتم

هرگاه دو زاویه و ضلع بینهما از مثلثی مساوی باشد با دو زاویه و ضلع بینهما از مثلث دیگر نظیر بنظیر آنگاه دو مثلث متساوی هستند
مثلا در شکل سابق ضلع ب ج = ه و و زاویه ب = ه و زاویه ج = و
و گوئیم مثلث د ه و مساویست با مثلث ا ب ج

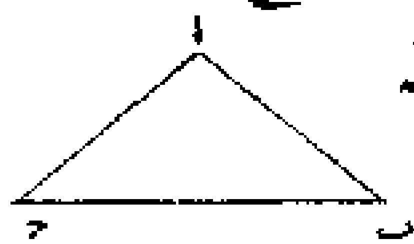
برهان بعمل انطباق ضلع ه و واقع میشود بر مساوی خود ب ج و نقطه
ه بر ب و نقطه و بر ج و زاویه ه چون مساویست با ب ضلع ه د
واقع میشود براستقامت ب ا و بنابراین نقطه د واقع میشود بر نقطه
از خط ب ا و همچنین زاویه و چون مساویست با ج خط و د واقع میشود
براستقامت ج ا و نقطه د بر نقطه از ضلع ج ا پس نقطه د بایست

بهم رسیده واقع شود بر دو خط ب ا و ح ا پس واقع خواهد شد بر فصل مشترک آنها نقطه ا و آنوقت دو مثلث درست منطبق میشوند و متساوی میگردند

نتیجه از اینکه هر دو مثلث سه جزو متساوی باشد ضلع ب ح = ه د و زاویه ب = ه و زاویه ح = د چنین استنباط میشود که سه جزو دیگر نیز متساوی میشوند ضلع ا ب = د ه و ا ح = د ر و ا = د

قضیهٔ هشتم

در هر مثلث هر ضلع اقصر است از مجموع دو ضلع دیگر



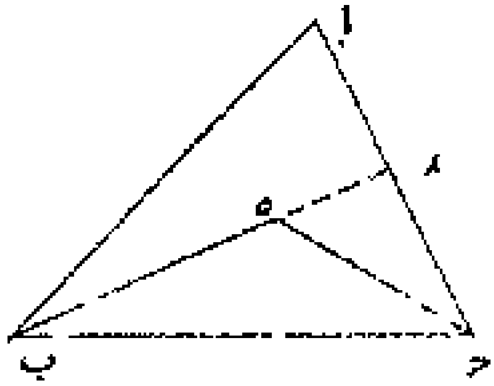
برهان خط ب ح چون مستقیم است اقصر فاصله باشد مابین دو نقطه ب و ح پس ب ح اقصر است از مجموع ا ب + ا ح

باید نیز دانست که هر ضلع اعظم است از تفاضل دو ضلع دیگر مثلاً ضلع بزرگ را ا فرض میکنیم و دو ضلع دیگر را ب و ح آنوقت بحکم همین شکل ا < ب + ح و چون ح را از طرفین اسقاط کنیم چنین میشود ا − ح < ب یعنی ب اعظم است از تفاضل ا و ح و چون ب را اسقاط کنیم ا − ب < ح

قضیهٔ نهم

چون از نقطهٔ ه مفروضه در داخل مثلث ا ب ح دو خط ه ب و ه ح را بطرفین ضلع ب ح وصل کنیم مجموع این دو خط اقصر است از مجموع دو خط ا ب و ا ح

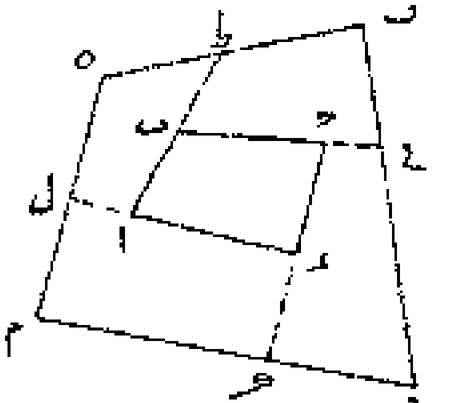
برهان خط ب ه را امتداد میدهیم تا ا ح را بر نقطهٔ د قطع کند آنوقت بنا بر قضیه خط ه ح اقصر است از مجموع ه د + د ح و چون ب ه را بر طرفین



بیفزائیم چنین میشود ب ه + ه د ح < ه ه
+ ه د + د ح یا آنکه ب ه + ه ح < ب د
+ د ح وهمچنین ب د < ب ا + ا د وچون
د ح را بر طرفین بیفزائیم چنین میشود ب
د + د ح < ب ا + ا ح وچون این را با
مساوات سابق جمع کنیم بطریق اولی چنین میشود ب ه + ه ح < ب ا + ا ح

قضیه دهم

محیط هر کثیر الاضلاع محدب مثل ا ب ح د اقصر است از هر نوع خطی مثل ه
ب که از اطراف بر او احاطه کرده باشد



برهان اضلاع کثیر الاضلاع ا ب ح د را در یک جهت
امتداد دهید تا منتهی شوند بخط محیط آن وقت
این چند نامساوات نتیجه شود

ا ب + ب ط < ا ل + ل ه + ه ط

ب ح + ح ک < ب ط + ط ب + ب ک

ح د + د ع < ح ک + ک ن + ن ع

د ا + ا ل < د ع + ع م + م ل

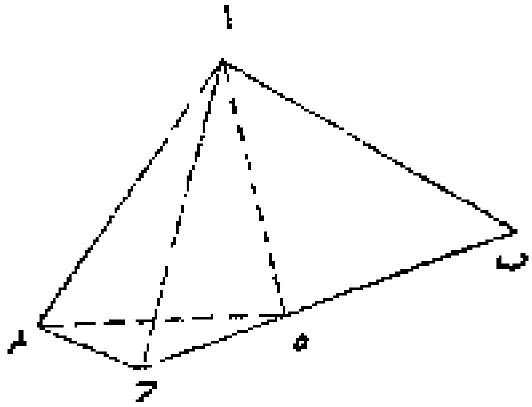
وبعد از جمع آنها و اسقاط مشترکات چنین میشود

ا ب + ب ح + ح د + د ا < ه ب + ب ک + ک ن + ن م + م ه

وهمچنین نیز ثابت میشود که محیط هر خط منکسر محدب اقصر است از خط احاطه کننده
که بطرفین آن منتهی شده باشد

قضیهٔ یازدهم

هرگاه دو ضلع مثلثی مساوی باشد با دو ضلع مثلث دیگر نظیر بنظیر
و زاویهٔ حادثه ما بین دو ضلع اوّل اعظم باشد از زاویهٔ حادثه ما بین
دو ضلع دوّم گوئیم که ضلع سیم مثلث اوّل اطول است از ضلع سیم مثلث دوّم



برهان دو مثلث را چنان ترتیب میدهیم که
ضلع ا د در هر دو مشترک باشد و دو
ضلع متساوی دیگر ا ب و ا ج در طرفین
آن افتند و فرض اینست که زاویه ب ا د
> ج ا د

زاویه ب ا د را بخط ا ه نصف میکنیم این خط واقع شود در زاویهٔ اعظم اج
و خط د ه را وصل میکنیم آن وقت بنا بر ق ٤ دو مثلث ب ا ه و
ه ا د متساوی میشوند پس ب ه = ه د ولی در مثلث ه د ج ضلع ج د
< ه د + ه ج و چون در این نامساوات ه د را بدل کنیم به ب ه چنین میشود
ج د < ب ه + ه ج یعنی ج د < ب ج

و بالعکس اگر دو ضلع ا ب و ا ج از مثلث ا ب ج مساوی باشند
بدو ضلع ا ج و ا د از مثلث ا ج د و ضلع سیم ج ب از مثلث اوّل اطول
باشد از ضلع سیم ج د از مثلث دوّم گوئیم زاویه ب ا ج اعظم است از
زاویه ج ا د زیرا که اگر این زاویه کوچکتر میبود از ج ا د لازم می آمد که ج ب
اقصر باشد از ج د و این خلاف فرض است و اگر مساوی میبود با ج ا د
آن وقت بنا بر ق ٤ ج ب مساوی میشد با ج د و این حکم نیز خلاف فرض است

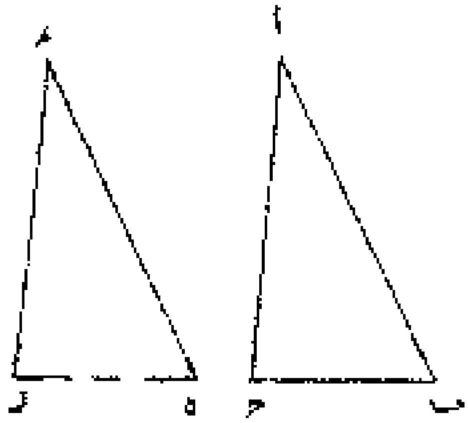
قضیهٔ دوازدهم

هرگاه سه ضلع مثلثی مساوی باشند با سه ضلع مثلث دیگر نظیر بنظیر آن دو مثلث متساوی هستند

مثلاً ضلع اب = ده و اج = دو

و بج = هو و میگوئیم زاویهٔ ا =

د و ب = ه و ج = و



برهان اگر زاویهٔ ا مثلاً بزرگتر بود از زاویهٔ د چون دو ضلع اب و اج مساوی هستند با دو ضلع ده و دو نظیر بنظیر

پس بحکم قضیهٔ سابقه ضلع بج اطول میشود از هو و اگر زاویهٔ ا را کوچکتر از د فرض کنیم آنوقت لازم می‌آید که ضلع بج اقصر باشد از هو و چون بج مساوی با هو فرض شده زاویهٔ ا نمیتواند اعظم باشد از د و نه اصغر پس مساوی است و بهمین وجه ثابت میکنیم که زاویهٔ ب = ه و زاویهٔ ج = و

شرح ملاحظه نمائید که هر دو زاویهٔ متساوی مقابل شده‌اند بدو ضلع متساوی مثلاً دو زاویهٔ متساوی ا و د مقابل‌اند بدو ضلع متساوی بج و هو

قضیهٔ سیزدهم

در هر مثلث متساوی الساقین دو زاویهٔ مقابل بدو ضلع متساوی متساوی‌اند

مثلاً ضلع اب = اج پس زاویهٔ ج مساوی است با ب

برهان ... از راس ا بر خط اد از وسط قاعدهٔ بج وصل میکنیم آنوقت دو مثلث ادب و ادج سه ضلع نظیر بنظیر متساوی دارند اد مشترک است و بفرض اب = اج و بد = دج

ب ه د پس بحکم قضیهٔ سابقه زاویه ب مساوی میشود با د

نتیجه – هر مثلث متساوی الاضلاع متساوی الزوایا نیز باشد

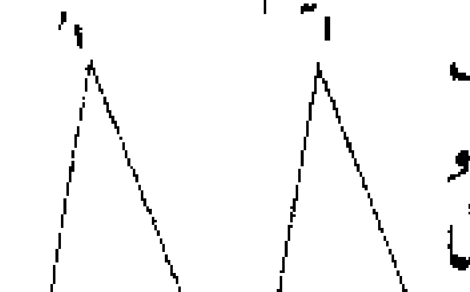
شرح – از تساوی دو مثلث ا ب ه و ا د ه لازم آید که زاویه ب ا ه = ه ا د و ب ه ا = ا ه د پس این دو زاویه قائمه اند و بنابراین خط مرسوم از راس مثلث متساوی الساقین بر وسط قاعده عمود است بر این قاعده و زاویه را نصف میکند

در مثلث غیر متساوی الساقین هر ضلع را میتوان قاعده فرض نمود و آنوقت راسش زاویه است که مقابل باشد بان ضلع ولی در مثلث متساوی الساقین قاعده مخصوصاً ضلع سیم است غیر از دو ساق متساوی

قضیهٔ چهاردهم

هرگاه در مثلثی دو زاویه متساوی باشند ضلعین مقابل بان دو زاویه متساوی هستند

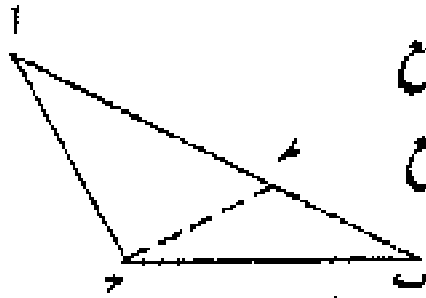
مثلا فرض میکنیم زاویه ا ب ج = ا ج ب و میگوئیم ا ج = ا ب



برهان – مثلث ا' ب' ج' را مساوی با مثلث ا ب ج رسم میکنیم چنانچه زاویه ب' = ب و ج' = ج و ضلع ب' ج' = ب ج و آنرا معکوساً منطبق میکنیم بر ا ب ج بر وجهیکه ضلع ج' ب' واقع شود بر ب ج یعنی ج' بر ب و نقطهٔ ب' بر ج و چون زاویه ج' = ج = ب ضلع ج' ا' واقع میشود بر استقامت ب ا و نقطهٔ ا' بر ا و نتیجه میشود ا' ب' = ا ج و بنابراین ا ب = ا ج

قضیهٔ پانزدهم

از دو ضلع هر مثلث اطول آنست که مقابل باشد بزاویهٔ اعظم
و بالعکس از دو زاویهٔ مثلث اعظم آنست که موتر باشد بضلع اطول



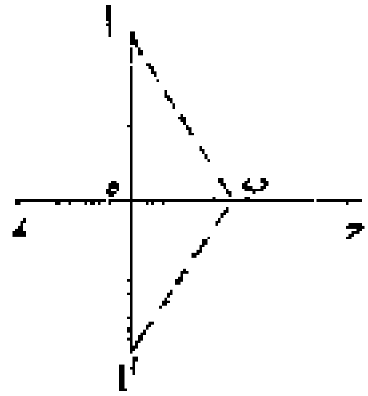
اول فرض میکنیم زاویهٔ ج > ب و میگوییم ضلع
اب مقابل بزاویهٔ ج اطول است از ضلع
اج مقابل بزاویهٔ ب

برهان زاویهٔ ب ج د را مساوی ب جدا کنید آنوقت در مثلث ب ج د ۱۴
ضلع ب د = د ج ولی ضلع اج اقصر است از اد + دج و این مجموع
مساویست با اد + دب = اب پس اب اطول است از اج
ثانیا فرض میکنیم ضلع اب > اج و میگوییم زاویهٔ ج مقابله بضلع اب
اعظم است از زاویهٔ ب مقابله بضلع اج زیرا که اگر فرض کنیم ج < ب پس
بحکم مذکور اب < اج و این خلاف فرض است پس لابد زاویهٔ ج باید اعظم باشد از ب [2]

[2] و فرض کنیم ج = ب بموجب ۴ اب = اج نیز خلاف فرض است

قضیهٔ شانزدهم

از نقطهٔ مفروضه خارج خطی میتوان یک عمود بر آن خط فرود آورد نه بیش

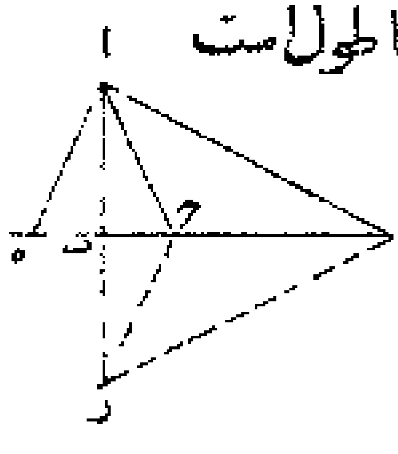


اولا ا نقطهٔ مفروضه است و ج د خط مفروض
پس جزء اعلای سطح را حول ج د حرکت میدهیم تا بجزء
اسفل منطبق شود و ا از نقطهٔ ا باشد در اینجا و اا را
وصل میکنیم آنوقت اگر جزء اسفل ا ج د را حول ج د
بعکس حرکت دهیم تا نقطهٔ ا بمقام اول خود معاودت کند خط ا ه درست منطبق
شود بر ا ه و زاویهٔ ا ه ج درست میپوشاند زاویهٔ ا ه ج را و چون این دو زاویه

مجاوره اند زاویهٔ اهج قائمه است پس اه عمود باشد بر جه
ثانیاً فرض میکنیم که از نقطهٔ ا بتوان دو عمود اه و اب را بر جه اخراج نمود پس یکی از آن دو عمود مثلاً اه را امتداد میدهیم انقدر که ها' مساوی شود با اه و خط ا'ب را وصل میکنیم آنوقت مثلث اهب مساوی میشود با ا'هب چونکه دو زاویهٔ اهب و ا'هب قائمه اند و ضلع اه = ا'ه و ضلع به مشترک است پس زاویهٔ ابه مساوی میشود با هبا' و چون زاویهٔ ابه قائمه است هبا' نیز قائمه میشود و در اینصورت چون مجموع دو زاویهٔ مجاوره ابه و هبا' دو قائمه شد باید خط ابا' مستقیم باشد و آنوقت لازم آید که بتوان مابین دو نقطهٔ ا و ا' را بدو خط مستقیم وصل نمود

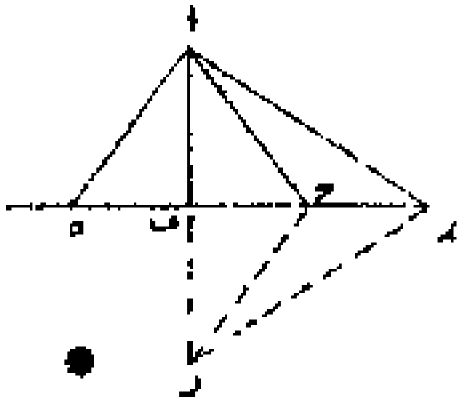
قضیهٔ نهم

چون از نقطهٔ ا واقعه در خارج خط ده عمود اب را بر آن خط فرود آوریم و خطوط مایله اه و اج و اد وغیره را بر نقاط مختلفهٔ آن خط وصل کنیم اولاً عمود اب اقصر است از هر خط مایلی و ثانیاً هر دو مایل متساوی البعد از موقع عمود مثل اج و اه که ببعد متساوی بج و به در طرفین واقع شده اند متساوی هستند و ثالثاً از هر دو خط مایلی مثل اد و اج یا اه و اد انکه از موقع عمود ابعد باشد اطول است



برهان عمود اب را باندازهٔ خود تا نقطهٔ ر امتداد میدهیم و دو خط رج و رد را وصل میکنیم آنوقت مثلث بجر مساوی شود با بجا چونکه دو زاویهٔ جبر و جبا قائمه اند و ساق

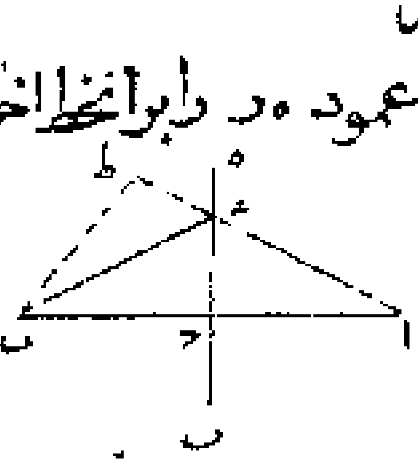
وضلع ج ب مشترک است وضلع ب د = ب ا پس و ث ضلع سیم ج د
مساوی شود با ضلع سیم ا ج و چون خط مستقیم ا ب د اقصر است از منکسر
ا ج د پس ا ب نصف ا ب د اقصر میشود از
ا ج نصف ا ج د یعنی عمود اقصر است از
هر خط مایل



ثانیاً چون ب ه را مساوی ب ج
فرض کنیم و ا ب مشترک است و زاویه
ا ب ه = ا ب ج مثلث ا ب ه مساوی میشود با مثلث ا ب ج و ث د
دو ضلع ا ه و ا ج متساوی گردند یعنی دو مایل متساوی البعد از موقع عمود متساوی باشند
ثالثاً در مثلث د د ا مجموع دو خط ا ج و ج د اقصر است از مجموع دو ضلع
ا د و د د و ث ۹ و بنابراین ا ج نصف ا ج د اقصر میشود از ا د نصف ا د د
یعنی از دو خط مایل هر کدام ابعد باشد از موقع عمود اطول است
نتیجه ۱ — فاصله حقیقی نقطه از خطی بطول عمود مشخص میشود چونکه عمود اقصر است از سایر خطوط
نتیجه ۲ — از نقطه مفروضه نمیتوان سه خط متساوی بخطی وصل نمود والا لازم آید
در یک سمت عمود دو مایل متساوی واقع شود

قضیه هیجدهم

چون از نقطه ه واقعه بر وسط خط ا ب عمود ه د را بر آن خط اخراج
کنیم گوئیم اولاً هر نقطه از این عمود متساوی



البعد است از طرفین ا ب و ثانیاً هر نقطه
واقعه در خارج عمود غیر متساوی البعد

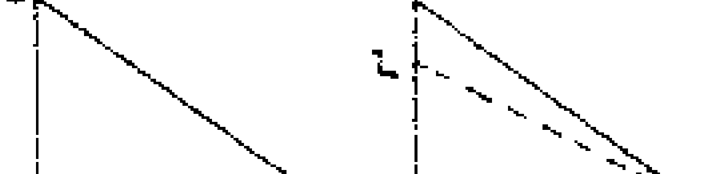
ازهان دو طرف

برهان اولاً چون اه = حب دو مایل اه و هب متساوی البعد میشوند
از موقع عمود و بنابراین متساوی باشند و همچنین دو مایل اه و هب و دو مایل
ار و رب پس معلوم شد که هر نقطهٔ از عمود متساوی البعد است از طرفین ا و ب
ثانیاً — ط نقطهٔ است خارج عمود و دو خط طا و طب را وصل میکنیم یکی
از این دو خط عمود را بر نقطهٔ د قطع میکند خط دب را نیز وصل میکنیم آنوقت دب
= دا ولی طب اقصر است از مجموع طد + دب = طد + دا = طا پس طب
< طا یعنی هر نقطهٔ که در خارج عمود فرض شود غیر متساوی البعد است از طرفین
نتیجه — هر خط که نقاطش دارای خاصیت مشترکه باشد دون نقاط خارج آن خط
آنرا مکان هندسی آن نقاط گوئیم مثل خط ه د که مکان هندسی نقاط متساوی البعد است از دو نقطهٔ ا و ب

قضیهٔ نوزدهم

هرگاه در دو مثلث قائم الزاویه وتر و یک ضلع متساوی باشند آن
دو مثلث متساوی هستند

مثلاً وتر اح = دو و ضلع اب = ده پس گوئیم مثلث ابح مساوی است با ده و

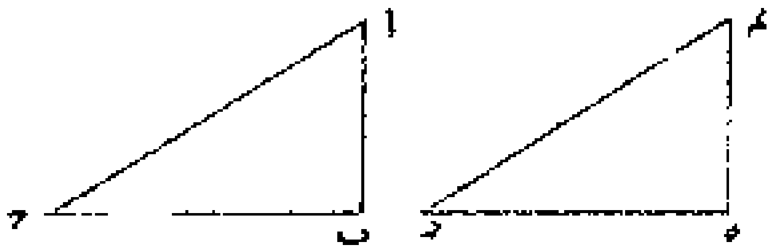


برهان در این دو مثلث اگر
ضلع سیم بح مساوی هو
باشد حکم ثابت میشد حال فرض
میکنیم متساوی نباشند و بح بزرگتر باشد از نظیر خود پس بح را مساوی ه و
جدا میکنیم و اح را وصل مینمائیم آنوقت مثلث ابح مساوی میشود با ده و
چونکه دو زاویهٔ ب و ه قائمه اند و متساوی و ضلع اب = ده و ضلع بح

= ه د پس اج = ده ولی بفرض ده مساوی است با اد پس اج = اد و این تساوی صحیح نباشد چونکه مایل اد ابعد است از مواقع عمود وغیرها پس جه اختلاف نداشته باشد با ه د و مثلث ا ب ج مساوی باشد با ده د

قضیهٔ بیستم

در دو مثلث قائم الزاویه هرگاه وتر و زاویه متساوی باشند آن دو مثلث متساوی هستند



مثلاً اج = دو و زاویه ا = د

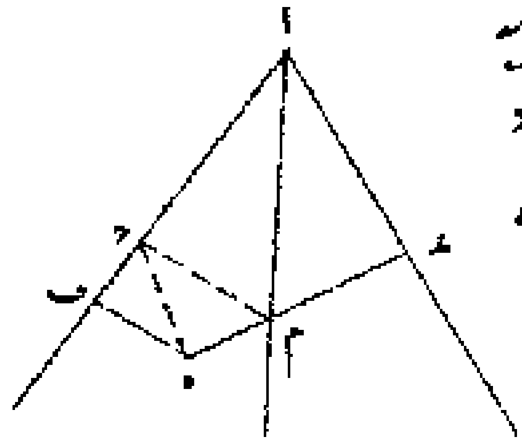
پس بدلیل انطباق ده ر را نقل میکنیم بر اب ج بروجهیکه دو واقع شود بر اج و آنوقت زاویه د چون مساویست با ا ضلع ده واقع میشود بر استقامت اب و درینصورت ره واقع خواهد شد بر استقامت ج ب و الا لازم آید که از ج بتوان دو عمود بر اب فرود آورد پس نقطه ه منطبق میشود بر ب و دو مثلث متساوی میگردند

قضیهٔ بیست و یکم

اولاً هر نقطه مثل م که فرض شود بر خط متصف الزاویه ب اد متساوی البعد است از ضلعین از زاویه وثانیاً هر نقطه مثل ه که در خارج آن خط فرض شود غیر متساوی البعد است از همان دو ضلع

برهان - اولاً از نقطه م واقعه بر متصف الزاویه ب اد دو عمود م د و م ج را بر اد و اب فرود آوریم تا دو مثلث قائم الزاویه م اد و م اج متساوی گردند چونکه وتر م ا در هر دو مشترک است و دو زاویه م اد و م اج متساوی

پس م د = م ج



ثانیاً از نقطه ه واقعه در خارج منصف الزاویه دو عمود ه د و ه ب را بر ا د و ا ب فرود آورید و از نقطه م آنجا که خط ه د منصف الزاویه را قطع میکند عمود م ج را بر ا ب فرود آورید و ه ج را وصل کنید آنوقت

در مثلث ج ه م ضلع ج ه < م ج + م ه و چون م ج = م د پس ج ه < ه د

و ب ه < ج ه پس ب ه < ه د

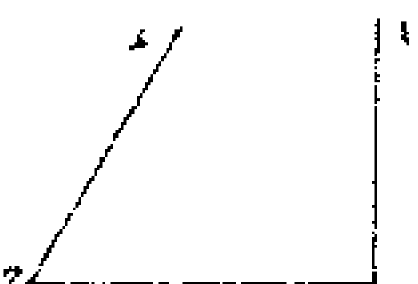
شرح خط منصف الزاویه مکان هندسی نقاطی است که متساوی البعد باشند از ضلعین آن زاویه

قضیه بیست و دوم

هرگاه دو خط ا د و ب ه عمود باشند بر خط ثالث ج د پس متوازی هستند

چونکه اگر متلاقی میشدند مثلاً بر نقطه م آن وقت لازم می‌آید که از آن نقطه دو عمود بر ج د فرود آمده باشند

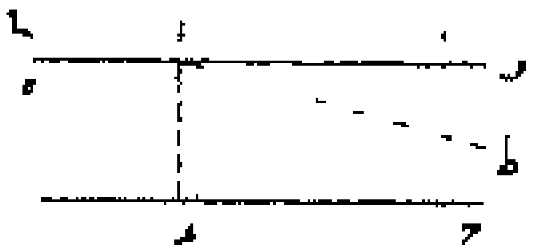
حکم - اگر یکی از دو خط ا ب و د ج عمود باشد بر ج ب و دیگری مایل پس بعد از امتداد متلاقی میشوند



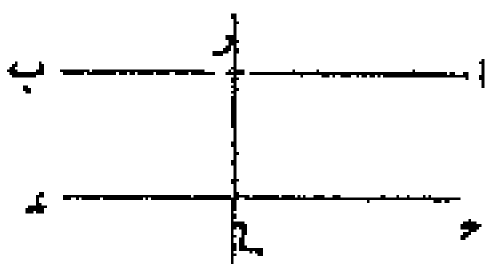
این حکم ظاهر است و محتاج بدلیل نیست

قضیه بیست و سوم

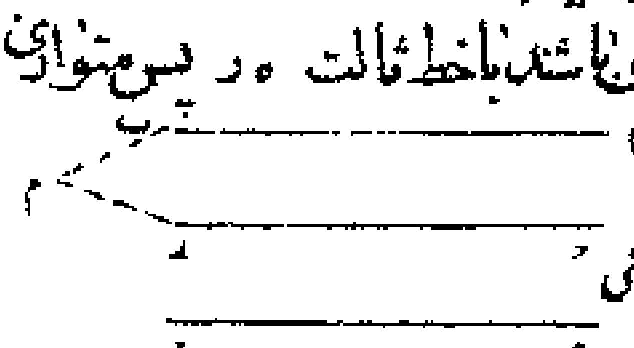
بر نقطه میتوان خطی بموازات خط دیگر مرور داد و بیش از یک موازی ممکن نیست

برهان – از نقطهٔ ا عمود اد را بر حد
فرود آورید و از همان نقطهٔ ا د را عمود نسبت
بر اد پس دو خط اد و حد متوازی شوند

(ق ۲۳) حال میگوئیم که غیر از خط اد هر خطی
مثل اط که برا مرور کند دیگر موازی نباشد چونکه
حد عمود است بر اد و اط مایل است نسبت بآن

قضیهٔ بیست و چهارم

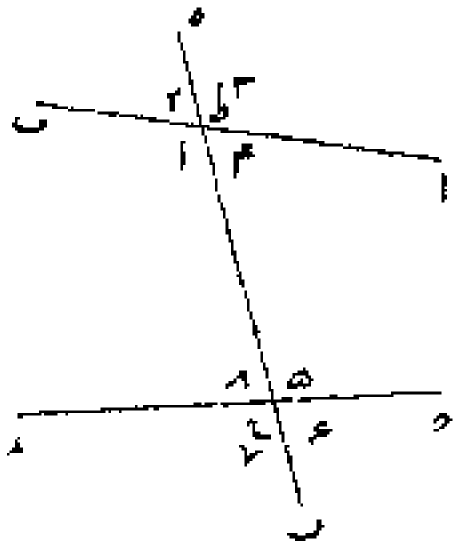
هرگاه دو خط حد و اب متوازی باشند و خط رح عمود شود بیکی
از آن دو مثلا بر اب پس عمود باشد بر خط دیگر حد
برهان اولا ظاهر است که رح باید تلاقی نماید
حد را والا لازم آید که بر نقطهٔ د دو خط مرور نموده

باشد بموازات حد و بعد از وقوع ملاقات گوئیم
عمود شود بر حد والا حد مایل باشد بر رح
و اب عمود است بر آن و در اینصورت متلاقی
شوند و این خلاف فرض است

قضیهٔ بیست و پنجم

هرگاه دو خط اب و حد متوازی باشند با خط ثالث ه ر پس متوازی
هستند نسبت بهمدیگر

چونکه اگر این دو خط اب و حد متلاقی
گردند بر نقطهٔ مثل م آنوقت لازم آید که

که از این نقطه بتوان دو خط بموازات ه د رسم نمود

حدود



هرگاه دو خط اب و جد را خط ثالث هز قطع کند هشت زاویه حول دو نقطهٔ فصل مشترک ط و ح احداث شود

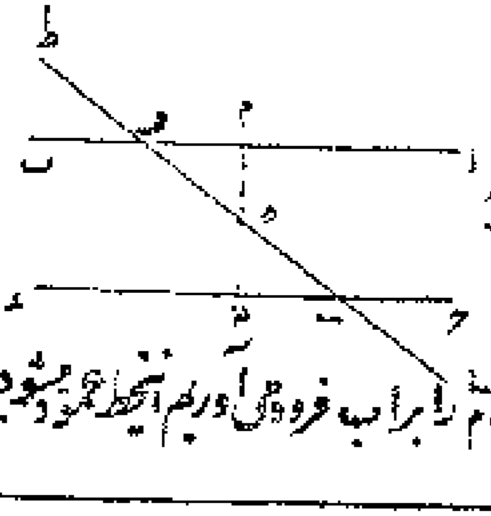
چهار زاویه ۱ و ۴ و ۵ و ۸ واقعه مابین دو خط اب و جد را زوایای داخله گوئیم و چهار زاویه دیگر را خارجه

و دو زاویه داخله ۱ و ۵ را که طرفین قاطع واقع شده اند و غیر مجاوره اند متبادله داخله گوئیم و دو زاویه داخله و خارجه ۸ و ۲ را که در یکسمت قاطع واقع شده اند و غیر مجاوره اند متقابله گوئیم

و دو زاویه خارجه غیر مجاوره ۲ و ۶ را که در طرفین قاطع واقع شده اند متبادله خارجه

قضیهٔ بیست و ششم

چون دو خط متوازی را خط ثالثی قطع کند گوئیم اولاً دو زاویه متبادله داخله متساوی باشند و ثانیاً دو زاویه متبادله خارجه متساوی باشند و ثالثاً دو زاویه خارجه و داخله متقابله متساوی باشند و رابعاً دو زاویه داخله واقعه در یکسمت قاطع مجموعشان مساوی با دو قائمه باشد



برهان دو متوازی اب جد است و قاطع طی پس از نقطهٔ ه وسط زح عمود هم را بر اب فرود آوریم و بر امتداد آنخط عمود مشود

ه م = ب ح د و دو مثلث قائم الزاویه ه ر د و ه ن ے متساوی میشوند چونکه
بفرض د و د ر ه ر و ه ے متساوی هستند و دو زاویه م ه ر و ے ه ن
نیز متساوی وارث اند و این دو مثلث دو زاویه متبادله داخله م ر ه و ه ے ن
متساوی شوند

و نیز بواسطه دو زاویه ب ر ے و ے ه ح که تمام دو زاویه م ر ه و ه ے ن اند قائمه

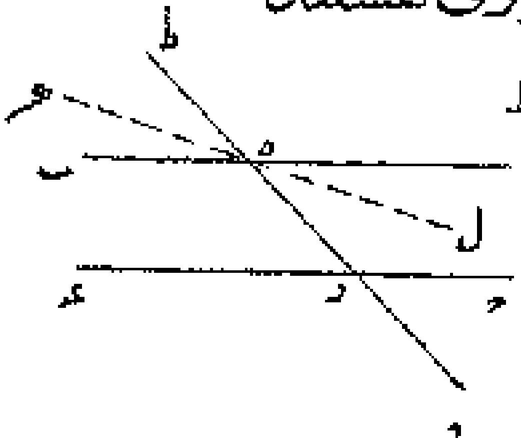
ثانیا دو زاویه متبادله خارجه ط ر ب و ح ے ی متساوی هستند چونکه متقابله بالراس اند
با دو زاویه متبادله داخله م ر ه و ه ے ن

ثالثا دو زاویه متقابله ط ر ب و ر ے د متساوی هستند چونکه ط ر ب =
ا ر ے و ا ر ے = ط ے د

رابعا مجموع دو زاویه ب ر ے و ر ے د مساوی است با دو قائمه چونکه
ب ر ے + ا ر ے = ۲ قائمه و ا ر ے = ر ے د

قضیه بیست و هفتم ۲۷

هرگاه دو خط را خط ثالثی قطع کند بر وجهی که دو زاویه متبادله داخله متساوی
شوند یا دو زاویه متبادله خارجه یا دو زاویه خارجه و داخله متقابله
و یا مجموع دو زاویه داخله حادثه در یک سمت قاطع مساوی شود با دو
قائمه در این چهار صورت آن دو خط متوازی هستند



دو خط مفروض ا ب است و ح د و خط
قاطع ط ی
برهان گوییم اگر دو زاویه متبادله داخله ا ه ر
و ه ر د متساوی باشند ا ب موازی است