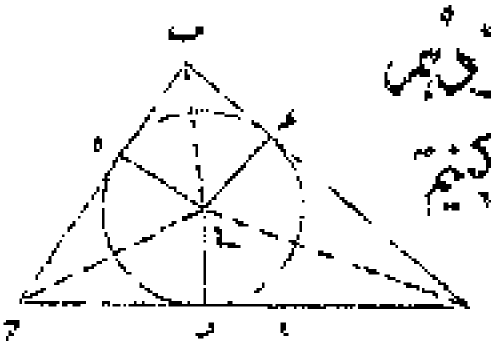
میکنیم و آن مماس مطلوبست (۲ و ۹ و)

واگر نقطه ا خارج دایره باشد بین آن نقطه و مرکز دایره را بخط د ا وصل میکنیم و آ
بر نقطه ه نصف میکنیم و از مرکز ه و بشعاع ه د دایره رسم میکنیم تا محیط مفروض را
بر نقطه ب قطع کند و خط ا ب را وصل میکنیم که مماس مطلوبست

برهان. چون د ب را وصل کنیم زاویه د ب ا محاطیه در نصف دایره قائمه باشد
(ق ۳۱) و بنا برین ا ب عمود باشد بر طرف شعاع د ب یعنی مماس دایره باشد

شرح. نقطه ا چون در خارج دایره واقع است ازآن دو مماس متساوی میتوان بر آن
رسم نمود یکی ا ب است و دیگری ا ه زیرا که در دو مثلث قائم الزاویه د ب ا و د ه ا
چون وتر د ا مشترکست و ضلع د ب = د ه این دو مثلث متساوی باشند (۱۹ و ۱)
پس ا ه = ا ب و نیز زاویه د ا ه = د ا ب

مسئله پانزدهم

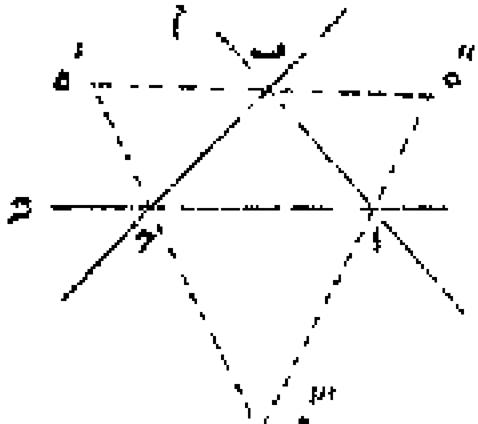


میخواهیم در مثلث ا ب ج دایره محاط کنیم
بر دو زاویه ا و ب دو خط منصف الزاویه
ا ح و ب ح را مرور دهیم این دو خط متقاطع
شوند بر نقطه ح و این نقطه متساوی البعد باشد از سه ضلع ا ب و ا ج و ب ج پس
اگر از آن نقطه سه عمود ح د و ح ه و ح ر را بر اضلاع مثلث فرود آوریم متساوی شوند
و دایره که از این نقطه و بشعاع ح د رسم شود مماس باشد بر سه ضلع

تنبیه ۱. نقطه ح بیک فاصله است از دو ضلع ب ج و ا ج و متعلق باشد بخط
منصف الزاویه ج پس سه خط منصف الزوایای مثلث بر نقطه متقاطع شوند

تنبیه ۲. چون دو زاویه خارجه م ب ج و ب ج ن را بدو خط منصف کنیم

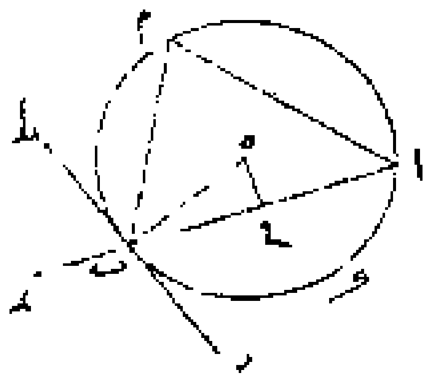
آن دو خط بر ه متقاطع شوند و این نقطه مرکز
دایره است که مماس شود بر ضلع ب ج و
بر استقامت دو ضلع دیگر همچنین دو نقطه
ه و ه مرکز دو دایره باشند که مماس شوند



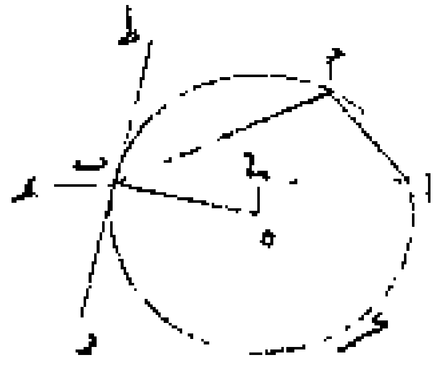
بر یکی از اضلاع مثلث و بر استقامت دو
ضلع دیگر پس معلوم میشود که بر سه خط مفروض چهار دایره میتوان مماس نمود

مسئلهٔ شانزدهم

میخواهیم بر خط اب قطعه دایره رسم کنیم که قابل احتوای زاویه مفروضه ج باشد یعنی چنان باشد که جمیع زوایای محاطیه اش مساوی با زاویه ج باشند



اب را بسمت د امتداد میدهیم بر نقطه ب زاویه
د ب ط را مساوی ج رسم میکنیم و ب ه را عمود میکنیم
بر ب ط و ح ی را عمود بر وسط اب این دو
عمود متقاطع شوند بر ه و از این نقطه و بشعاع ه ب

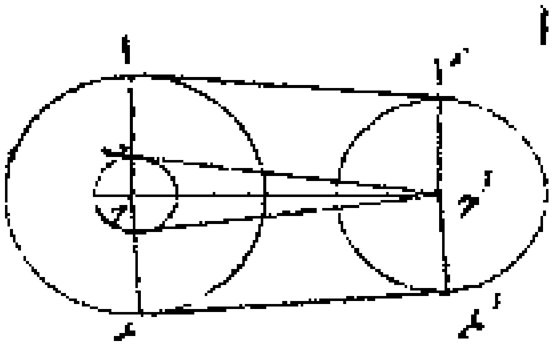


دایره رسم میکنیم و قطعه مطلوبه ا م ب است
برهان. چون ب د عمود است بر طرف شعاع
ه ب مماس دایره باشد و مقیاس زاویه
ا ب د نصف قوس ا ك ب است (۲۰۵) و
مقیاس زاویه محیطیه ا م ب نیز نصف قوس ا ك ب است پس زاویه ا م ب = ا ب د
= ط ب د = ج پس جمیع زوایای محاطیه در قطعه ا م ب مساوی باشند با زاویه مفروضه ج
شرح. اگر زاویه مفروضه قائمه بود قطعه مطلوبه نصف دایره میشد مرسوم بر قطر ا ب

مسئلهٔ یکصدم

میخواهیم بر دو دایره خطی مماس مشترک رسم کنیم

اول فرض میکنیم مسئله حل شده باشد و اا'

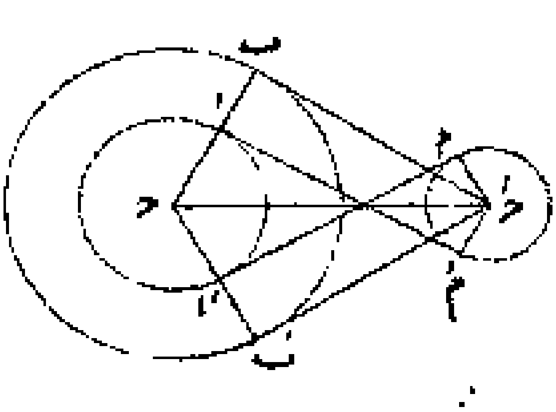


مماس مشترک خارج باشد بر دو دایره و دو
شعاع ح ا و ح' ا' را بر دو نقطهٔ مماس وصل
میکنیم و خط ح' ب را موازی با اا' پس دو
شعاع ح ا و ح' ا' چون عمود اند بر اا' عمود باشند بر ح' ب پس خط ثانی مماس شود بر
دایره که از مرکز ح رسم شود بشعاع ح ب = ح ا − ح' ا' پس ازین تفصیل دستور
العمل ذیل استنباط شود

از مرکز ح و بشعاعی مساوی بتفاضل ح ا − ح' ا' دایره رسم کنید و از نقطهٔ ح' خطی بر این
دایره مماس کشید و چون نقطهٔ ب بدست آمد خط ح ب ا رسم کنید و ح' ا' را بموازات
ح ا و خط اا' را اخراج نمائید که مماس مطلوب است

از دستور العمل مذکور چنین استنباط میشود که مسئله صاحب دو جواب است چونکه از نقطهٔ
ح' دو خط مماس میتوان بر دایره مرور داد و شرط امکان مسئله اینست که ح ح' ≥ ح ا
− ح' ا' و بعبارت اخری اینست که دو محیط متداخل نباشند و الا جواب ندارد

حال میخواهیم خطی مماس مشترک بر دو دایره



رسم کنیم دو شعاع آنها ح ا است و ح' م
و خط ا م مماس مطلوب باشد پس دو
نقطهٔ مماس و شعاع ح ا و ح' م را
وصل میکنیم و خط ح' ب را بموازات

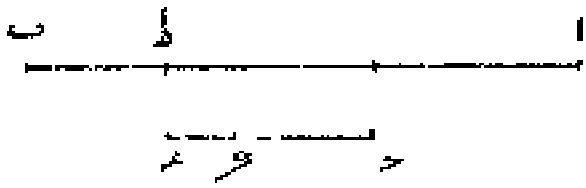
امُ حال چون امُ عمود است بر دو شعاع د ا و دُ مُ خط دُ ب نیز عمود باشد بر همان دو خط و بنابراین مماس شود بر دایره که از مرکز د رسم شود بشعاع د ب = د ا + ا ب = د ا + دُ مُ

و دستور العمل این شد که از مرکز د و بشعاعی مساوی مجموع دو شعاع دو دایره مفروضه دایره رسم کنیم و از نقطه دُ خط دُ ب را بر آن مماس کنیم و باقی عمل را بطریق مذکور جاری نمائیم

این مسئله نیز صاحب دو جواب است ولی شرط امکانش اینست که د دُ ≥ د ا + دُ مُ یعنی متخارجه باشند یا مماس خارج

مسئلهٔ هجدهم

میخواهیم بزرگتر مقسوم علیه مشترک ما بین دو خط ا ب و ج د معلوم کنیم و بعد نسبت عددی آنها را



بزرگتر مقسوم علیه مشترک این دو خط ممکن نیست از خط اقصر ج د متجاوز کند

ولی این خط اگر مرات صحاح در خط اطول ا ب بگنجد در این صورت خود بزرگتر مقسوم علیه مشترک مطلوب است پس آنرا بر ا ب نقل میکنیم و فرض میکنیم ا ب = ۲ ج د + ط ب و میگوئیم بزرگتر مقسوم علیه مشترک ما بین ا ب و ج د بعینه همانست که موجود باشد ما بین دو خط ج د و ط ب

زیرا که هر مقسوم علیهی که مشترک باشد ما بین ا ب و ج د چون عاد میکند ج د را عاد کند ا ط را و چون عاد میکند ا ب را عاد کند درست باقی ط ب پس مقسوم علیه مشترک باشد ما بین ا ب و ج د

واز اینقرار جمیع مقسوم علیه‌های مشترک مابین اب و جد بعینها همانهاست که یافت شود مابین جد و طب پس بزرگتر آنها نیز یکی باشد

حال طب را بر جد نقل میکنیم و فرض میکنیم جد = طب + كد و بطریق مذکور ثابت میکنیم که بزرگتر مقسوم علیه مشترک مابین جد و طب همانست که یافت شود مابین طب و كد

حال كد را بر طب نقل میکنیم و فرض میکنیم طب = ۲ كد و خط كد بزرگتر مقسوم علیه مشترک باشد مابین اب و جد

واز تساویهای سابق این دو تساوی نتیجه شود

جد = ۳ كد
اب = ۸ كد

پس نسبت اب بر جد بقدر $\frac{۸}{۳}$ است

تنبیه - در آخر عمل چنین فرض کردیم که سلسلهٔ اعمال منتهی شود بباقی صفر و حال میخواهیم ثابت کنیم که اگر دو خط صاحب مقیاس مشترک باشند فرض صحیح است والا اگر اصم باشند بصفر نمیرسیم ولی باقی‌ماندها متدرجاً کوچکتر میشوند تا بهر حد که خواسته باشیم

چونکه فرض میکنیم جه و ده دو خط مفروض باشند و ب۱، ب۲، ب۳، ب۴ ... باقی‌ماندهای متتالی باشند و م۱، م۲، م۳، م۴ ... خارج قسمتها پس این تساویها حاصل شود

جه = ده م۱ + ب۱
ده = ب۱ م۲ + ب۲
ب۱ = ب۲ م۳ + ب۳
ب۲ = ب۳ م۴ + ب۴
. . . .
. . . .

باقی ب۱ کوچکتر است از $\frac{جه}{۲}$ زیرا که ده اگر بیش از یکمرتبه در جه نگنجد بزرگتر باشد از

ج پس آن ثانی کوچکتر باشد از $\frac{ج}{ط}$ و اگر چندین مرتبه در ح بجهة حکم مذکور بطریق اولی صحیح باشد
و بهاندیل این چند نامساوی حاصل شود

$\frac{ب}{م} < \frac{ح}{ط}$ و بنابراین $\frac{ب}{م} < \frac{ح}{ط}$

$\frac{ب}{ه} < \frac{ح}{ط}$ و بنابراین $\frac{ب}{ه} < \frac{ح}{ط}$

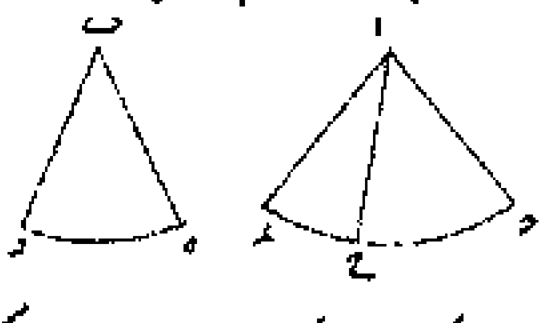
$\frac{ب}{ر} < \frac{ح}{ط}$ و بنابراین $\frac{ب}{ر} < \frac{ح}{عا}$

و همچنین در مابقی

پس معلوم شد که اگر رشته عمل را بی اندازه ممتد کنیم باقی ماندها انقدر کوچک میشوند که بخواهیم و بنابراین اگر مقسوم علیه مشترکی در میان ا ب و ا ب نباشد باقی مانده صفر خواهیم رسید والا لازم آید که باقی مانده ای پیدا شود کوچکتر از مقسوم علیه مشترک و این حکم بنابر قضیه مذکوره باطل است

مسئله نوزدهم

میخواهیم بزرگتر مقسوم علیه مشترک مابین دو زاویه ا و ب را اگر داشته باشد معلوم کنیم و بعد از آن نسبت عددی آنها را



از دو مرکز ا و ب و بیک شعاع دو قوس ح د و ه د ه را رسم کنید و اینها مقیاس اند دو زاویه اند پس بطریق مسئله سابقه

عمل را در دو قوس ح د و ه و ر جاری نمائید زیرا که بهمان طور که خطی را بر خطی نقل میکنیم میتوان قوسی را نقل نمود بر قوسی دیگر که بهمان شعاع باشد پس اگر این دو قوس را مقسوم علیه مشترکی باشد بوجه مذکور بدست آید و بعد نسبت عددی آنها و این نسبت بعینه نسبت این دو زاویه مفروضه است و ا ب ج مثلا اگر ع ه مقیاس مشترک دو قوس باشد ع ا ب مقیاس مشترک دو زاویه هم و اگر دو قوس مفروض اصم باشند دو زاویه نیز چنین است و آنوقت باید نسبت تقریبی آنها را بدست آورد.

مقاله ششم

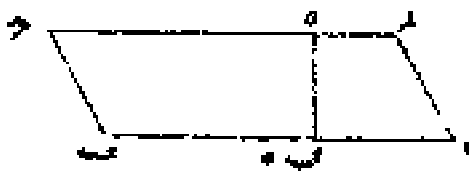
در مقیاس و مساحت اشکال ذوکثیرة الاضلاع و تشابه آنها

حدود

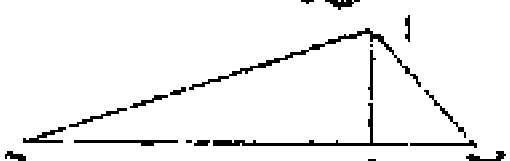
۱- مساحت شکل عبارت است از نسبت وسعت آن شکل بوسعت واحد سطح و در کلام ممکن است دو کلمه سطح و مساحت بجای همدیگر استعمال شوند

۲- دو شکل متعادل آنستکه از حیثیت مساحت متساوی باشند دو شکل ممکن است متعادل باشند با آنکه بحسب صورت هیچ متشابه نباشند مثل دایره و مربع و همچنین مثلث و مربع مستطیل و امثال آنها

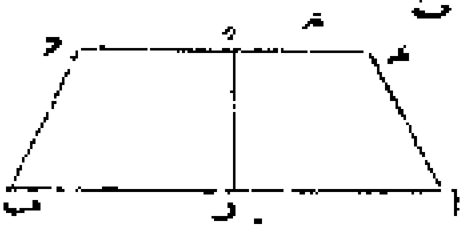
و در دو شکل کلمه متساوی مختص بآنست که چون یکی از آنها بر دیگری نقل شود در جمیع اجزای خود بر هم منطبق شوند مثل دو دایره که صاحب یک شعاع باشند و دو مثلثی که اضلاع نظیر بنظیر متساوی باشند و امثال آنها



۳- ارتفاع متوازیة الاضلاع عبارت است از عمود هـ و که اندازه فاصله مابین دو ضلع متقابل قاعدتین اب و حد باشد



۴- ارتفاع مثلث عمود اد است که از راس زاویه ا اخراج شده باشد بر ضلع مقابل ب ح که قاعده است



۵- ارتفاع ذوذنقه عمود هـ و است که مابین دو ضلع متوازیش اب و حد اخراج شده باشد

تنبیه قبل از رسیدن باین مقاله و مقالات مابعد باید خواص تناسبات را دانست و تفصیل آنرا در اصول حساب و اصول جبر و مقابله ذکر نموده ایم و اینجا نظر بآنکه در احکام و براهین مابعد ابهامی نباشد بعضی تناسب اشاره مینمائیم تناسب حیث ا : ب = ح : د و از

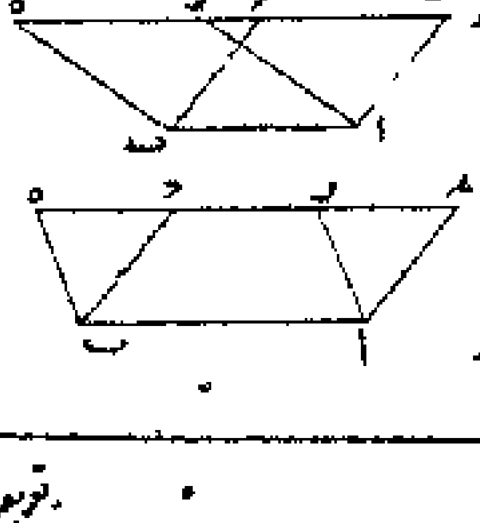
میدانیم که حاصل ضرب طرفین ا × د مساویست با حاصل ضرب وسطین ب × ج
این حکم در اعداد محقق است و گوئیم بجمیع مقادیر تعلق گیرد مشروط بر آنکه بعدد تعبیر شده باشند
یا چنان تصور کنیم که تعبیر شده اند و این فرض تا اندازه وقوع یافت مثلا چهار مقدار ا و ب و ج
و د اگر خطوط باشند چنان تصور میکنیم که یکی از آنها یا خطی بحجم مقیاس مشترک تقسیم شده باشد
از واحد طول آنوقت هر کدام از ا و ب و ج و د تعبیری است از عده احاد صحاح باشند
یا کسور منطق باشند یا اصم و تناسب ما بین خطوط ا و ب و ج و د مبدل میشود بتناسب عددیه
پس مضروب دو خط ا و د که سطح نیز گوئیمش عبارت شد از عدد احاد طولی ا ضرب در عدد
احاد طولی د و معلوم است که چنین حاصل ضرب ممکن است مساوی شود بلکه باید مساوی شود
با حاصل ضربی که بهمان وجه از دو خط ب و ج بدست آید

دو مقدار ا و ب ممکن است از نوعی باشند مثل خط و دو مقدار ج و د از نوع دیگر مثل سطح
در اینصورت باید آن مقادیر را اعداد فرض نمود ا و ب احاد طولی باشند و ج و د احاد سطح
و دو حاصل ضرب ا × د و ب × ج نیز عدد میشوند

و بطور کلی در جمیع اعمال متعلقه بتناسبات باید جمله‌های آنها هر کدام را عددی فرض نمود
از واحد نوع خود و آنوقت بی زحمت آن اعمال و نتایج شان مفهوم شوند

قضیهٔ اول

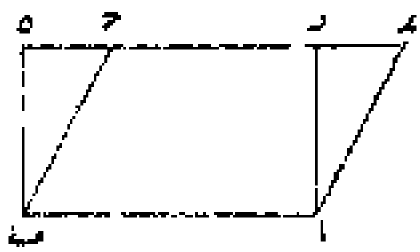
هر دو متوازی الاضلاعی که بر قاعده و ارتفاع واحد باشند معادل همدیگرند



برهان ا ب قاعده مشترک دو متوازی الاضلاع
ا ب ج د و ا ب ه ز است و چون فرض کرده ایم
بر یک ارتفاع باشند دو قاعده فوقانیشان
د ج و ز ه واقع شوند بر خطی موازی ا ب و بنابر

توضیح متوازیة الاضلاع اد = ب ح و اه = ب ه و همچنین د ح = اب و ه و =
= اب پس د ح = ه ر حال چون از تمام خط ه د یک مرتبه ه د را تفریق کنیم و مرتبه
دیگر ه را و باقی ح ه و ه د متساوی شوند و آنوقت دو مثلث د ا ه و ح ب ه
اضلاعشان نظیر بنظیر متساوی باشند پس این دو مثلث متساویند

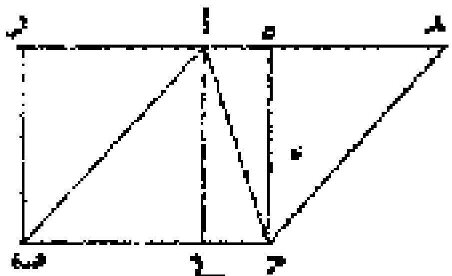
حال چون از ذو اربعة الاضلاع ا ب ه د مرتبه مثلث ا ه د را موضوع کنیم باقی بماند
متوازی الاضلاع ا ب ه د و مرتبه دیگر مثلث ح ب ه را باقی بماند متوازی الاضلاع
اب ح د پس این دو متوازی الاضلاع متساوی باشند



نتیجه - هر متوازی الاضلاعی مثل اب ح د
معادل باشد با سطح اب ه د که بر قاعده و ارتفاع اوست

قضیهٔ دوم

مثلث اب ج نصف متوازی الاضلاع اب ح د است که بر قاعده و ارتفاع آن باشد
زیرا که دو مثلث اب ج و اج د متساوی هستند (۳۴)



نتیجهٔ ۱ - پس مثلث اب ج نصف سطح ب ج ه د است
که بر همان قاعده ب ج و همان ارتفاع ا ل باشد
زیرا که سطح ب ج ه د معادلست با متوازی الاضلاع اب ح د

۲ - جمیع مثلثاتیکه بر قاعده و ارتفاع واحد باشند یعنی قاعدهشان متساوی باشد و ارتفاعشان
متساوی معادل همدیگر هستند

قضیهٔ سیم

نسبت دو سطحی که بر ارتفاع واحد باشند مثل دو قاعدهٔ آنهاست

دو سطح مفروض اب ج د ... و ا ه و ... ارتفاع مشترک ا د ... میگوئیم نسبت آنها بهمدیگر مثل اب است به

برهان فرض میکنیم دو قاعده اب و اه منطق باشند و نسبتشان مثل ۷ باشد به ۴ پس اب را بهفت قسمت متساوی کنیم و اه شامل چهار از آن اجزا میشود و از نقاط تقسیم عمودها بر قاعده اخراج کنیم تا بهفت سطح جزء متساوی بدست آید چونکه بر قواعد متساویه و برابر ارتفاع واحد و سطح اب جد شامل ۷ هر هفت جزو است و اه ده شامل چهار از آن جزو است نسبت ابجد به اه ده مثل ۷ است به ۴ یا مثل اب به اه و دلیل مذکور کلی است هیچ تعلق بعدد ساوی ندارد پس بنا بر آنکه دو قاعده منطق باشند

اب جد : اه ده = اب : اه

واگر دو قاعده اب و اه اصم باشند باید مانند وجهی که در دوایر ذکر شده اینجا بیان نمود

قضیهٔ چهارم

نسبت دو سطح بیکدیگر مثل حاصل ضرب دو قاعدهٔ انها است در دو ارتفاع

فرض میکنیم سه و س مساحت دو سطح باشند و عه و عد دو بعد سطح سه و ق و ع دو بعد سطح دیگر فرض کنیم سُه بر قاعدهٔ اول عه و برابر ارتفاع دوم ع پس بنابر قضیهٔ سابقه

سه : سُه = عه : ع

سُه : س = عه : ق

این دو تناسب را جزو بجزو در هم ضرب میکنیم و دو جملهٔ اول تناسب حاصل را بر سُه قسمت کنیم چنین شود

سه : س = عه × عه : ق × ع — (۱)

در مساحت سطح مساحت نمودن سطح س عبارت از یافتن نسبت وسعت او بسطحی مثل س که واحد سطح فرض شده

وبنابر قضیهٔ مذکور این نسبت برابر چه بدست آید که خطوط عه و عد و ق و ع را بواحد طول سنجیده عدد هر کدام را معلوم کنیم و حاصل ضرب عه و عد اول را بر حاصل ضرب ق و ع

ماثی قسمت کنیم مثال سه = ۶ ذرع عه = ۴ ، ق = ۳ ، ع = ۲

پس سه/ق ع = ۶×۴/۲×۳ = ۴ و بنابراین سطح سه چهار مثل سطح س واحد است

بیشتر است که واحد سطح را مربعی گیرند که ضلعش واحد طول باشد و در این صورت چون

دو عدد ق و ع هر کدام واحد میشوند تناسب (۱) چنین میشود

سه : س = ه × عه : ۱

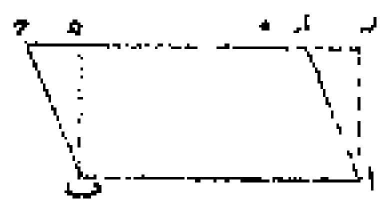
پس معلوم میشود که نسبت هر سطح مربعی که بر واحد طول مرتب شود مساویست با حاصل ضرب دو عدد مرتبهٔ قاعده و ارتفاعش و اینها واحد طول میشوند و این مطلب بطور اختصار چنین اداکنیم که مقیاس و اندازهٔ هر سطح حاصل ضرب قاعدهٔ اوست در ارتفاعش

مثال هر = ۳ دسم و عه = ۲۵ سم

و مساحت سطح چنین است ۲۵ ۱۴ ۹ سانتیمتر مربع یا ۳۵ میلیمتر مربع ۹۱۴ دسیمتر مربع ۷ متر مربع

قضیهٔ پنجم

مساحت متوازی الاضلاع مساویست بحاصل ضرب قاعده اش در ارتفاعش



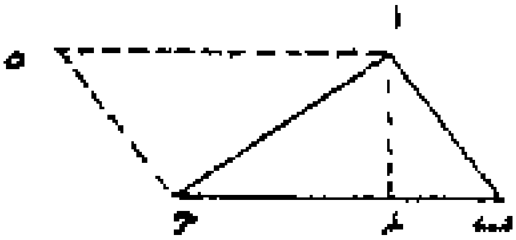
برهان متوازی الاضلاع اب جد معادلست با سطح اب هو که بر قاعده اب او است و بر ارتفاع ب ه ایستاده و مقیاس سطح مذکور است

اب × به پس همین حاصل مساحت متوازی الاضلاع باشد

نتیجه — اشکال متوازی الاضلاعی که بر قاعدهٔ واحد باشند نسبتشان بیکدیگر مثل ارتفاعات است و آنها که بر ارتفاع واحد باشند نسبتشان مثل قواعد است زیرا که چون اب و د را سطح طول فرض کنیم این تناسب نتیجه میشود اب × ده : ب × ح = اب : ب

قضیهٔ ششم

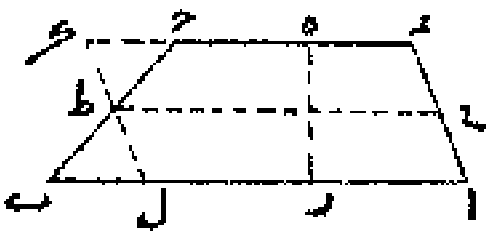
مساحت مثلث مساویست بحاصل ضرب قاعده‌اش در نصف ارتفاع



برهان مثلث اب ج نصف متوازی الاضلاع
اب ج ه است که بر همان قاعده ب ج و همان
ارتفاع اد رسم شده و مساحت شکل ثانی مساوی است
با ب ج × اد و پس مساحت مثلث چنین باشد $\frac{1}{2}$ ب ج × اد یا ب ج × $\frac{1}{2}$ اد
نتیجه — هر دو مثلث که برابر ارتفاع واحد باشند نسبتشان مثل دو قاعده است اگر بر قاعدهٔ
واحد باشند نسبتشان مثل دو ارتفاع است

قضیهٔ هفتم

مساحت ذوذنقه اب ج د مساویست با حاصل ضرب ارتفاع ه د
در نصف مجموع دو قاعدهٔ متوازیه اب و ج د

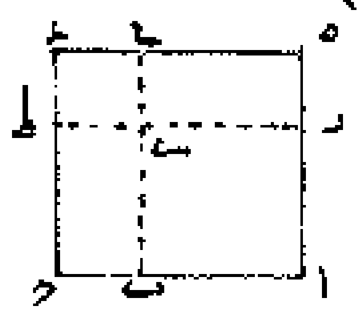


برهان از نقطهٔ ط وسط ضلع ج ب خط ک ل را
بموازات ضلع مقابل اد رسم میکنیم و د ج را امتداد
میدهیم تا آنرا بر نقطهٔ ک ملاقی کند پس در دو مثلث ط ب ل و ط ج ک ضلع ط ب
بعمل = ط ج و زاویهٔ ل ط ب = ج ط ک و زاویهٔ ط ب ل = ط ج ک چونکه ج ک
موازیست با ب ل و علی هذا پس این دو مثلث متساوی باشند و علیهذا پس ذوذنقه
اب ج د مساویست با متوازی الاضلاع ا د ک ل و مقیاس شکل ثانی است
ه د × ا ل و لیکن ا ل = د ک و چون مثلث ط ب ل = ک ج ط ضلع ب ل
= ج ک پس اب + ج د = ا ل + د ک = ۲ ا ل و بنابراین ا ل نصف مجموع
دو قاعده اب و ج د است و حجت باین صورت نموده شود اب ج د = ه د × $\frac{\text{اب + ج د}}{۲}$
شرح — چون از نقطهٔ ط وسط ب ج خط ط ح را بموازات قاعده اب رسم کنیم نقطهٔ ح

نیز بروسط اه افتد چونکه شکل اب ط ل و همچنین شکل ه ح ط ک نظر بتوازی اضلاع
مقابله متوازی الاضلاع اند پس اب = ط ل و ه ح = ط ک و چون نظر بتساوی
و شکث ب ط ل و ح ط ک ضلع ط ل = ط ک پس اب = ح ه
و نیز ظاهر است که ب ط = ال = $\frac{\text{اب}+\text{حه}}{۲}$
پس مساحت ذوذنقه را میتوان نیز باین صورت نوشت ه و × ب ط یعنی مساویست
با حاصل ضرب ارتفاع در خط واصل ما بین منتصف دو ضلع غیر متوازی

قضیهٔ هشتم

هرگاه خط اح بر دو جزو اب و ب ح قسمت شده باشد پس مربع تمام اح مرکب
باشد از مربع قطعه اب باضافهٔ مربع قطعهٔ ب ح باضافهٔ مضاعف مسطح
دو قطعهٔ اب و ب ح یعنی چنین اح۲ یا (اب + ب ح)۲ = اب۲ + ب ح۲ + ۲ اب × ب ح

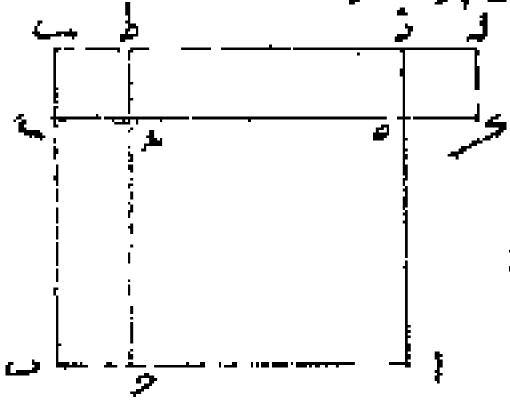


برهان مربع اح ده را رسم کنید و ار را مساوی
اب جدا کنید و وط را بموازات اح رسم کنید
و ب ح را بموازات اه
پس مربع اح ده بر چهار جزء قسمت میشود جزء اول اب س ز مربعی است مرسوم بر اب
چونکه ار = اب و جزء دوم س ط ح مربعی است مرسوم بر ب ح چونکه اح = اه
و اب = ار پس تفاضل اح − اب = تفاضل اه − ار و بنابراین ب ح = ه ر و نظر
بتوازی اضلاع س ط = ب ح و ح ط = ه ر پس س ح ط ه مربعی است مرسوم
بر ب ح و بعد از وضع این دو جزء از تمام مربع باقی میماند دو مسطح ب س ط ... و ه ر
س ط که هر یک مساوی است اب × ب ح فهو المطلوب
نتیجه فرض میکنیم ب و ح دو عدد باشند نظیر دو جزو خط اح پس بعمل ضرب جبری این تساوی

نتیجه شود (ب+ج)^2 = ب^2 + ج^2 + ۲ ب ج
و چون مقیاس سطح را مساوی فرض کنیم این تساوی دلیل دیگر است بر قضیه مذکوره
و در دو قضیه ذیل نیز با یدچنین ملاحظه نمود

قضیه نهم

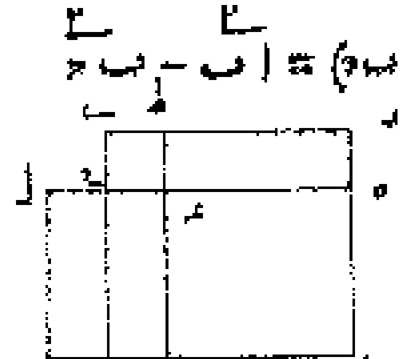
خط ا ج تفاضل دو خط ا ب و ب ج است پس مربع ا ج مرکب باشد از مربع ا ب با ضافه مربع ب ج منهای مضاعف سطح ا ب و ب ج یعنی چنین
ا ج^2 یا (ا ب − ب ج)^2 = ا ب^2 + ب ج^2 − ۲ . ا ب × ب ج



برهان — مربع ا ب د ر را رسم کنید و از ا مساوی ا ج جدا کنید و ج ط را بموازات ب د رسم کنید و ی ل را بموازات ا ب و مربع ه ر ل ی را تمام کنید
پس مقیاس دو سطح د ب ی ط و ط ل ی ه
هر کدام عبارت است ا ب × ب ج و بعد از وضع آنها از تمام شکل ا ب ل ی ه ا که عبارت است
با ا ب^2 + ب ج^2 ظاهر است که باقی میماند مربع ا ج ی ه فهو المطلوب
حکم مذکور بدستور جبری نیز ثابت شود از اینقرار (ب − ج)^2 = ب^2 + ج^2 − ۲ . ب ج

قضیه دهم

سطح مجموع و تفاضل دو خط ا ب و ب ج مساویست با تفاضل دو مربع آنها خط یعنی چنین (ا ب + ب ج) × (ا ب − ب ج) = ا ب^2 − ب ج^2

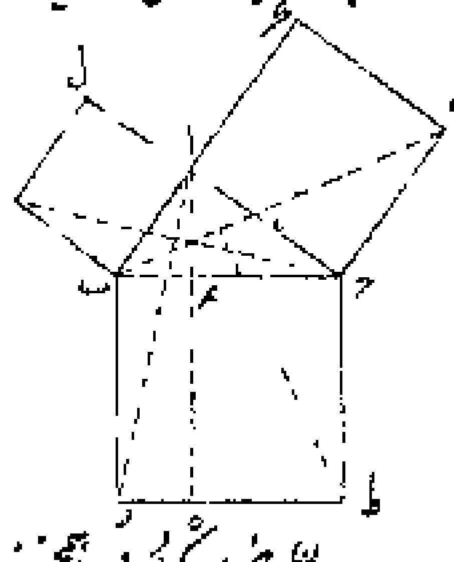


برهان دو مربع ا ب د ر و ا ج ه ی را بر ا ب و ا ج رسم کنید و ا ب را امتداد دهید بقدری که ب ک مساوی شود با ب ج و سطح ا ک ل ه را تمام کنید

پس قاعده الک از سطح بقدر مجموع دو خط اب و ب ح است وارتفاعش اه بقدر تفاضل
همان دو خط پس سطح الک ل ه = (اب + ب ح) × (اب − ب ح) و لیکن این سطح
مرکب است از دو جزء اب ح ه + ب ح ل ک و جزء ب ح ل ک مساوی است با
سطح ه د ط د چونکه ب ح = د ه و ب ک = ه د پس الک ل ه = اب ح ه + ه د ط د
و مجموع مساوی است با مربع اب منهای مربع ب ح که رسم شده است بر اب
پس خلاصه (اب + ب ح) × (اب − ب ح) = اب² − ب ح²
شرح این حکم نیز از دستور جبری استنباط شود باین صورت
(ب − ح) (ب + ح) = ب² − ح²

قضیهٔ یازدهم

دو مثلث قائم الزاویه مربع وتر مساوی است با مجموع دو مربع دو ضلع دیگر
برهان - مثلث اب ح قائم الزاویه است بنقطه ا و بعد از تربیع اضلاع از ا د عمود



ا د را بر وتر اخراج میکنیم و امتداد میدهیم
تا نقطه ه و دو قطر ا د و ح ی را وصل میکنیم
پس زاویه اب د مرکب باشد از مجموع زاویه اب ح
و زاویه قائمه ح ب د و زاویه ح ب ی
مرکب باشد از همان زاویه اب ح و زاویه قائمه
اب ی پس زاویه اب د = ی ب ح و ضلع اب = ب ی چون دو ضلع مربع هستند و همچنین
ب د = ب ح پس دو مثلث اب د و ی ب ح چون دو ضلع و زاویه بینهاشان
متساوی است مساوی باشند و مثلث اب د نصف سطح ب د ه د باشد (و برای
اختصار سطح ب ه) که بر همان قاعده ب د و همان ارتفاع ب د است و ۲

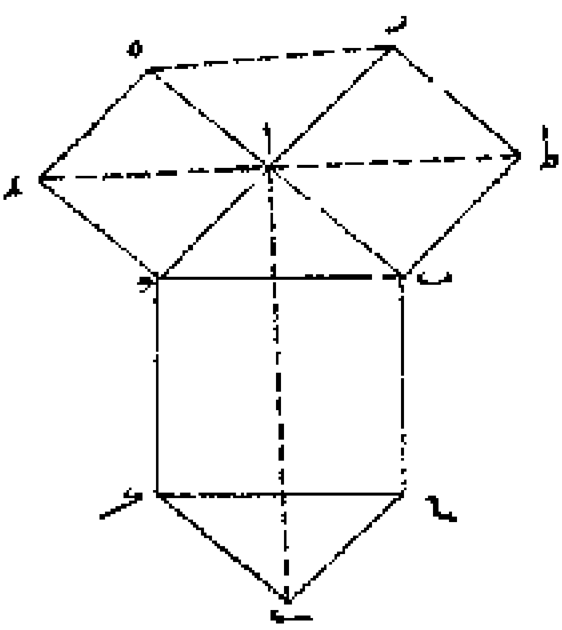
وهمچنین مثلث ح ب د نصف مربع ا ح است چونکه دو زاویه ب ا ه و ب ا ل قائمه اند ودو جزء ا د و ا ل واقع باشند بر استقامت خطی متوازی با ح ب پس مثلث ح د ب ومربع ا ح بر قاعده واحده ب ح و بر ارتفاع واحد اب باشند و بنابراین مثلث نصف مربع است

واول ثابت کردیم که مثلث اب د مساویست با مثلث ح ب د پس سطح ح ه د ب که مضاعف مثلث اب د است معادل باشد با مربع ا ح که مضاعف مثلث ح ب د است

وبهمین طرز ثابت نمائیم که سطح ح د ه ط معادل باشد با مربع ا ب و از مجموع دو سطح ب د ه د و ح د ه ط مربع ب ح و ط د ترکیب شود پس مربع ب ح ط د مرسوم بر وتر مساویست با مجموع دو مربع ا ب ح ل و ا ح ك مرسوم بر دو ضلع دیگر بالتصور ب ح = اب + اح

وجه دیگر ـ بعد از تربیع ضلع مثلث زاویه ك ح ب را مساوی ب ح ا رسم میکنیم و ح ز را مساوی ح ا جدا میکنیم و نقطه ب را بنقطه ك وصل میکنیم ونقطه د را بنقطه ه و خط ط ا را وصل میکنیم و امتداد میدهیم تا منتهی شود بنقطه ه و حال میگوئیم که چهار ذوار بعه اضلاع ط ب ح د و ط د ه ه و ا ح ك و ا ح ل ك متساوی هستند

تساوی دو شکل اول را باینطور ثابت میکنیم شکل ط ب ه د را دوران میدهیم حول ط د که منصف دو زاویه قائمه ط و ه است پس دو ضلع ط ب و د ه منطبق شوند بر ط ه و ه ح وخط د ه بر ب ح



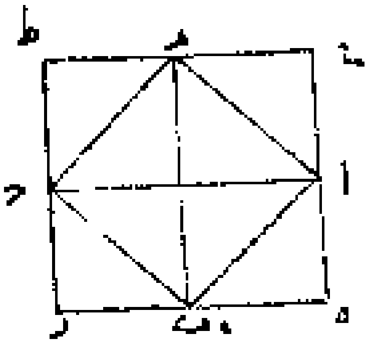
و در اثبات تساوی دو شکل ط ب ح د و ا ب ح ك شکل اول را حول نقطه ب دوران میدهیم

تا ب ط واقع شود بر مساوی خود ب ا وضلع ب ح نظیر متساوی دو زاویه ط ب ح و ا ب
واقع شود بر ب ح ونقطه ح بر ح و بالجمله نظیر متساوی دو زاویه ب ح ه و ب ح د خط
ح د منطبق شود بر مساوی خود ح ه

وبهمین جهة ثابت میکنیم که شکل ط ب ح د مساویست با ا ح ک ب

پس چهار ذو اربعة اضلاع متساوی شدند و شکل ط ب ح د ه ز معادل گشت با ا ب ه ک ح و حال چون از یکطرف دو مثلث متساوی را ه و ا ب ح را وضع کنیم و از طرف دیگر دو مثلث ا ب ح و ه ک ح را باقی بماند مجموع دو مربع ا ب ط د + ا ح د ه مساوی با مربع ب ح ک ه

نتیجه ۱ مربع یکی از دو ضلع مجاور بزاویه قائمه مساویست با مربع وتر منهای مربع ضلع دیگر باینصورت $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{بح}}^2 - \overline{\text{اح}}^2$

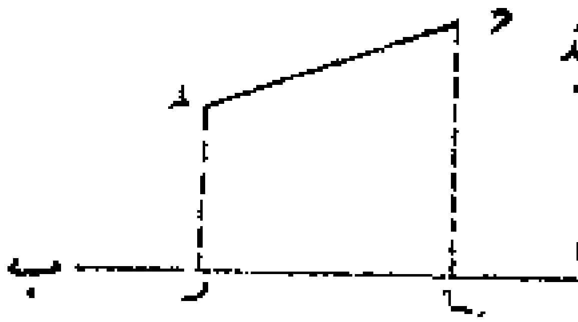


۲ ــ شکل ا ب ح د مربعیست و ا ح قطر آن مربع و مثلث ا ب ح قائم الزاویه است و متساوی الساقین پس $\overline{\text{اح}}^2 = \overline{\text{اب}}^2 + \overline{\text{بح}}^2$ $= ۲ \cdot \overline{\text{اب}}^2$ پس نتیجه شد که مربع قطر ا ح مضاعف مربع ضلع ا ب است وچون $\overline{\text{اح}}^2 : \overline{\text{اب}}^2 = ۲ : ۱$ بعد از استخراج جذر از طرفین میشود ا ح : ا ب $= \sqrt{۲} : ۱$ یعنی در شکل مربع قطر وضلع متباین باشند

۳ ــ در وجه اوّل ثابت شد که مربع ل ح معادلست با سطح ب ه ز د و نظر باشتراک ارتفاع ب د مربع ح ب ط د نسبت بسطح ب ه ز د مثل قاعده ح ب است بقاعده ب ه پس $\overline{\text{بح}}^2 : \overline{\text{اب}}^2 = \text{بح} : \text{به}$

یعنی که مربع وتر زاویه قائمه نسبت بمربع یکی از دو ضلعش مثل طول وتر است بقطعه

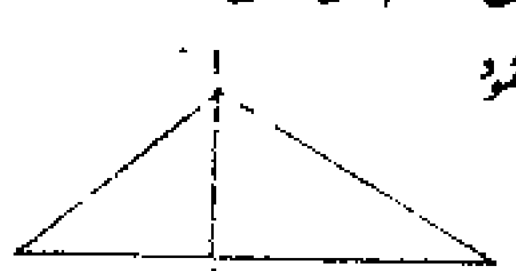
مجاور که بهمان ضلع و قطعه عبارتست از آن جزء و تراست که تحدید شده باشد بعمود قائم
از زاویه قائمه و از اینقرار ب د قطعه مجاور بضلع اب است و د ح قطعه مجاوره بضلع
اح و از اینقرار است ح۲ : اح۲ = ب ح : ح د
عم ـ دو مسطح ب د × ر و د ح × ط ه نیز بر یکدیگر منطبق اند و بنابراین بر نسبت دو قاعده
ب د و ح د و چون این دو شکل معادلند با دو مربع اح۲ و اح۲ پس اب۲ : اح۲ =
ب د : د ح یعنی که مربع دو ضلع مجاور بزاویه قائمه بنسبت دو قطعه میباشند که مجاور
آن دو ضلع باشند تنبیه مثلث قائم الزاویه نظر باینهمه خواص و فرضیت شکل عروس گویند
و اسم ترکیب این اشکال برابر اینش ... گویند



حل ـ تصویر خط د ه بر خط اب
عبارتست از قطعه ر ط واقعه مابین
دو عمود وارده از دو نقطه ح و د بر خط اب

قضیه دوازدهم

در هر مثلث مربع ضلع مقابل بزاویه حاده مساویست با مجموع مربعین دو ضلع
دیگر منهای مضاعف مسطح یکی از آن دو ضلع در تصویر ضلع دیگر بر همین ضلع

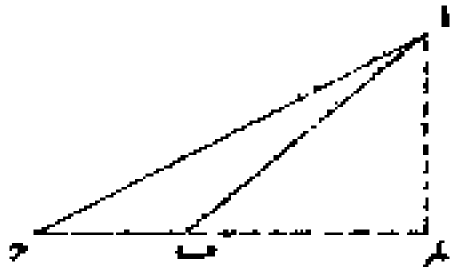


مثلاً در مثلث اب ح زاویه ح حاده است و عمود
اد را بر ب ح فرود می آوریم و میگوییم
اب۲ = اح۲ + ب ح۲ − ۲ ب ح × ح د

برهان این شکل دو حالت دارد اول آنکه عمود داخل مثلث اب ح واقع شود پس ب د
= ب ح − ح د و بنابراین ق ب د۲ = ب ح۲ + ح د۲ − ۲ ب ح × ح د و چون
بر طرفین مساوی اد۲ اضافه کنیم ملاحظه نمائیم که در دو مثلث قائم الزاویه اب د

و از این دو تساوی حاصل است $\text{اد}^2 + \text{بد}^2 = \text{اب}^2$ و $\text{اد}^2 + \text{دج}^2 = \text{اج}^2$

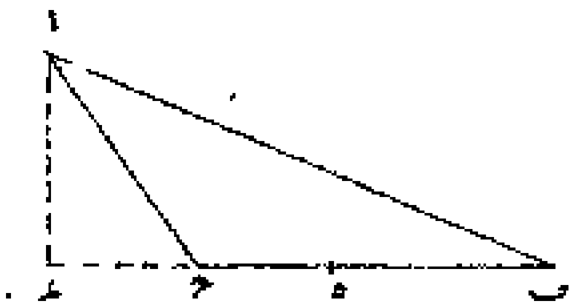
معادلهٔ اول چنین شود $\text{اب}^2 = \text{بج}^2 + \text{اج}^2 - ۲\,\text{بج} \times \text{جد}$



حالت دوم هنگامیکه عمود اد خارج مثلث ابج واقع شود پس $\text{بد} = \text{جد} - \text{بج}$ و بنابراین $\text{بد}^2 = \text{جد}^2 + \text{بج}^2 - ۲\,\text{جد} \times \text{بج}$ و چون بر طرفین اد^2 بیفزائیم بطریق سابق چنین میشود $\text{اب}^2 = \text{بج}^2 + \text{اج}^2 - ۲\,\text{بج} \times \text{جد}$

قضیهٔ سیزدهم

در هر مثلث منفرج الزاویه مربع ضلع مقابل بزاویهٔ منفرجه مساویست مجموع دو مربع دو ضلع دیگر با اضافهٔ مضاعف سطح یکی از آن دو ضلع در تصویر ضلع دوم بر همین ضلع



مثل ضلع اب مقابل بزاویهٔ منفرجه ج از مثلث ابج پس از ا بر بج عمود کشیم و گوییم $\text{اب}^2 = \text{اج}^2 + \text{بج}^2 + ۲\,\text{بج} \times \text{جد}$

برهان - عمود مذکور ممکن نیست در داخل مثلث واقع شود زیرا که اگر مثلا بر نقطهٔ ه واقع میشد آنوقت مثلث اجه دارا میشد زاویهٔ قائمهٔ ه و زاویهٔ منفرجهٔ ج را و این محال است پس باید در خارج واقع شود و بنابراین $\text{بد} = \text{بج} + \text{جد}$ و بعد از آن ق ۸ $\text{بد}^2 = \text{بج}^2 + \text{جد}^2 + ۲\,\text{بج} \times \text{جد}$ و چون بر طرفین تساوی اد^2 اضافه کنیم و تصرف شکل سابق را در آن نمائیم چنین میشود $\text{اب}^2 = \text{بج}^2 + \text{اج}^2 + ۲\,\text{بج} \times \text{جد}$

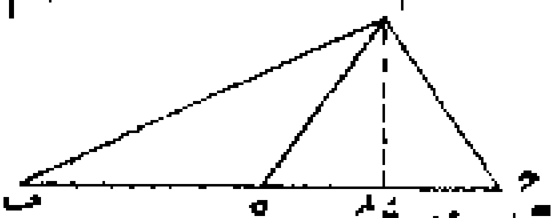
شرح - مثلث قائم الزاویه تنها دارای این خاصیت است که مجموع دو مربع دو ضلعش مساوی باشد با مربع ضلع سیم زیرا که اگر زاویه واقعه مابین آن دو ضلع حاده باشد مجموع آن دو مربع

اعظم باشد از مربع ضلع مقابل واگر منفرجه باشند اصغر باشد از آن مجموع

قضیهٔ چهاردهم

در هر مثلث مثل ابج چون خط اه را از راس ا بر وسط قاعده وصل کنیم بحکم مخفو شود

$$\overline{\text{اب}}^{2}+\overline{\text{اج}}^{2}=2\cdot\overline{\text{اه}}^{2}+2\cdot\overline{\text{به}}^{2}$$



برهان عمود اد را بر قاعده بج فرود

آوریم آنوقت بنا بر (۱۳) در مثلث اهج این تساوی نتیجه شود

$$\overline{\text{اج}}^{2}=\overline{\text{اه}}^{2}+\overline{\text{جه}}^{2}-2\cdot\text{جه}\times\text{هد}$$

و در مثلث ابه بنا بر (۱۳) این تساوی

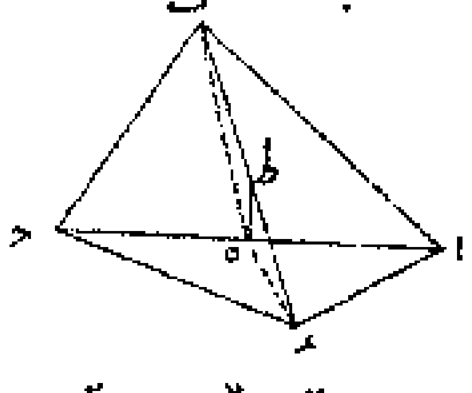
$$\overline{\text{اب}}^{2}=\overline{\text{اه}}^{2}+\overline{\text{به}}^{2}+2\cdot\text{به}\times\text{هد}$$

و بعد از جمع دو تساوی و ملاحظه اینکه هب = هج چنین شود

$$\overline{\text{اب}}^{2}+\overline{\text{اج}}^{2}=2\cdot\overline{\text{اه}}^{2}+2\cdot\overline{\text{هب}}^{2}$$

قضیهٔ پانزدهم

در هر ذو اربعه اضلاع مجموع مربعات چهار ضلعش مساویست با مجموع دو مربع دو قطر با اضافه چهار برابر مربع خط واصل مابین منتصف دو قطر



برهان اج و بد دو قطر ذو اربعه اضلاع ابجد است و ه و ط دو نقطه وسط دو قطر

و خطوط به و ده و هط را وصل میکنیم

آنوقت بنا بر قضیه سابقه در مثلث ابج

$$\overline{\text{اب}}^{2}+\overline{\text{بج}}^{2}=2\cdot\overline{\text{به}}^{2}+2\cdot\overline{\text{اه}}^{2}$$ و در مثلث ادج $$\overline{\text{اد}}^{2}+\overline{\text{دج}}^{2}=2\cdot\overline{\text{ده}}^{2}+2\cdot\overline{\text{اه}}^{2}$$

و بعد از جمع $$\overline{\text{اب}}^{2}+\overline{\text{بج}}^{2}+\overline{\text{اد}}^{2}+\overline{\text{دج}}^{2}=2\left(\overline{\text{به}}^{2}+\overline{\text{ده}}^{2}\right)+4\cdot\overline{\text{اه}}^{2}$$ و چون

درمثلث د ه ع

در مثلث ب ه د $\overline{\text{به}}^{2}+\overline{\text{ده}}^{2}=2.\overline{\text{بط}}^{2}+2.\overline{\text{هط}}^{2}$

پس $\overline{\text{اب}}^{2}+\overline{\text{بج}}^{2}+\overline{\text{اد}}^{2}+\overline{\text{دج}}^{2}=4\,\overline{\text{بط}}^{2}+4.\overline{\text{هط}}^{2}+4.\overline{\text{اه}}^{2}$

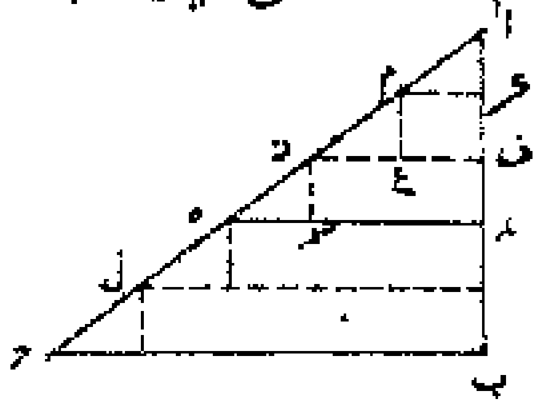
وچون $\overline{\text{بد}}^{2}=4\,\overline{\text{بط}}^{2}$ و $\overline{\text{اج}}^{2}=4\,\overline{\text{اه}}^{2}$ پس

$\overline{\text{اب}}^{2}+\overline{\text{بج}}^{2}+\overline{\text{اد}}^{2}+\overline{\text{دج}}^{2}=4.\overline{\text{هط}}^{2}+\overline{\text{بد}}^{2}+\overline{\text{اج}}^{2}$

نتیجه – اگر ذو اربعة الاضلاع مذکور متوازی الاضلاع باشد خط ط ه معدوم شود پس چنین نتیجه میشود که در هر ذو اربعة الاضلاع مجموع مربعات چهار ضلع مساوی با مجموع دو مربع دو قطر و عکس چنین حکم نیز صحیح است

در تشابه اشکال   قضیهٔ شانزدهم   خطوط متناسبه

هر خط که بموازات یکی از اضلاع مثلث رسم شود دو ضلع دیگر را بیک نسبت قطع کند



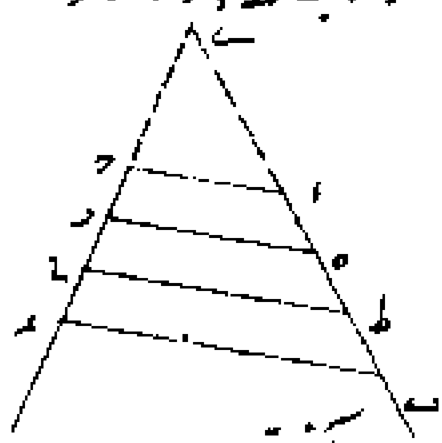
برهان – ده خطی است موازی با قاعده ب ج از مثلث اب ج و اول فرض میکنیم که دو خط اد و دب مقیاس مشترکی داشته باشند

و آن سه مرتبه در اد بگنجد و دو مرتبه در دب واین تناسب نتیجه میشود اد : دب = ۳ : ۲

وبر نقاط تقسیم اب خطوطی بموازات ب ج رسم میکنیم وبر نقاط م و ن و ه و ل خطوطی بموازات اب پس جمیع مثلثات ا ک م و م ع ن و غیره نظیر متساوی یک ضلع و دو زاویهٔ طرفین متساوی باشند مثلاً در دو مثلث م ع ن و ن س ه دو زاویه م ع ن و ن س ه نظیر متوازی اضلاعشان متساوی باشند و نیز دو ضلع م ع و ن س نظیر متساویشان یا دو خط ک ف و ف ط متساوی باشند

پس از تساوی این مثلثات چنین نتیجه میشود که ام = م ن = ن ه = ه ل = ل ج

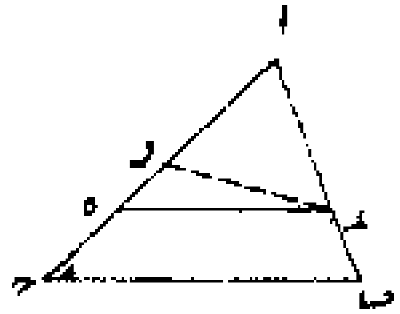
وچون اه دارای ۳ جزو از این اجزاست و هج دارای ۲ جزو پس اه : هج = ۳ : ۲
وبعد از مقایسهٔ این تناسب با تناسب سابق چنین نتیجه میشود اد : دب = اه : هج
واگر دو خط اد و دب اصم باشند و مقیاس مشترک نداشته باشند باید بطریق (۲۱۸)
پیش رفت و ثابت نمود که همواره اندو خط بر نسبت اه و هج است
نتیجهٔ ۱ - بترکیب تناسب مذکور این تناسب نتیجه میشود اد : اد + دب = اه : اه + هج
یا اد : اب = اه : اج
ونیز اد + دب : دب = اه + هج : هج یا اب : دب = اج : هج



نتیجهٔ ۲ - در دو خط اب و دج اجزاء مفروزه بخطوط متوازیه اد و هر و طح و بد وغیره متناسب باشند زیرا که چون دو خط اب و جد را امتداد دهیم تا بر نقطهٔ ب متقاطع شوند در مثلث به ر خط اد موازیست با قاعدهٔ هر و از آن وقت
به : بد = اه : جد ونیز در مثلث ب طح این تناسب نتیجه شود
به : بد = هط : رح وبعد از وضع نسبت مشترک این تناسب
اه : جد = هط : رح
وهمچنین تناسب کنیم
هط : رح = طب : حد

قضیهٔ هفدهم

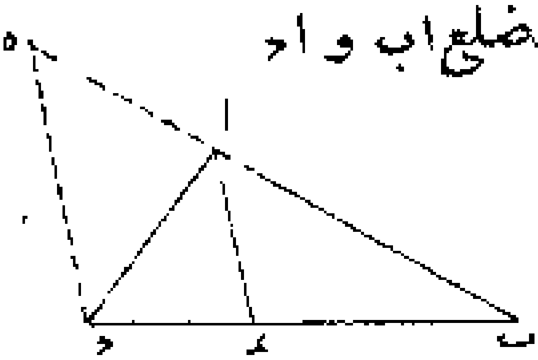
وبالعکس اگر در مثلث اب ج دو ضلع اب و اج را خط ده چنان قطع نموده باشد که اد : دب = اه : هج یعنی بر نسبت واحد پس خط قاطع ده بموازات قاعدهٔ بج باشد



برهان اگر کشیده ده موازی نیست با ب ج فرض میکنیم
د ز بموازات آن باشد و آنوقت بحکم شکل سابق اد : دب
= از : زج و بنا بر فرض اد : دب = اه : هج
پس نظر بنسبت مشترکه از : زج = اه : هج و
بعد از تبدیل از : اه = زج : هج و این تناسب صحیح نیست چونکه از طرفی تالی اه اعظم است از
از و از طرفی تالی هج اصغر است از زج پس خطی که از نقطه د بموازات ب ج رسم
شود منطبق خواهد شد بر ده یعنی این خط قاطع موازی قاعده است با قاعده مثلث
شرح - اگر خط قاطع این تناسب بدست اید اب : اد = اج : اه باز بحکم مذکور
صحیح است زیرا که بعد از تفصیل چنین شود اب - اد : اد = اج - اه : اه
یا چنین ب د : اد = ج ه : اه

قضیهٔ هیجدهم

در مثلث اب ج اولاً خط اد منصف زاویهٔ ا قاعدهٔ ب ج را قطع کند
بدو جزء ب د و د ج متناسب با دو ضلع اب و اج
وثانیاً خط از منصف زاویهٔ خارجه ج ا ه تحدید کند در امتداد قاعده
دو قطعهٔ ب ز و ج ز را بر نسبت دو ضلع اب و اج

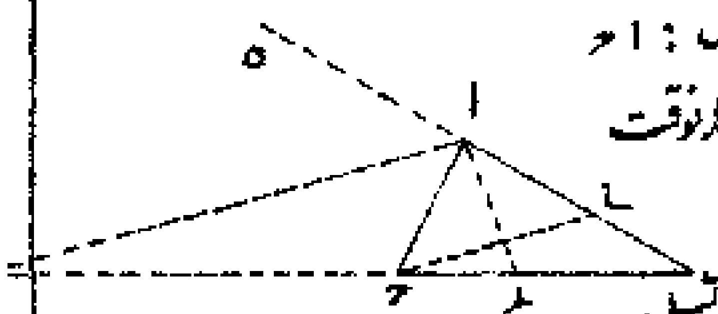


برهان حکم اول بر نقطه ج خط ج ه را بموازات
دا رسم کنیم تا امتداد ب ا را بر ه قطع کند
آنوقت در مثلث ب ج ه خط اد موازیست با
قاعده ج ه و این تناسب نتیجه شود و مثلث ب د : د ج = ب ا : اه
ولی مثلث اج ه متساوی الساقین است زیرا که نظر بموازی دو ضلع اد و ج ه زاویه

اده = داح و زاویه اه ح = ب اد و بنا بر فرض داح = ب اد پس زاویه

اده = اه ح و بنابراین اه = اح حال چون در تناسب سابق اد را بجای اه قرار

دهیم چنین میشود ب د : د ح = ا ب : ا ح



برهان عکس خط ح ز را بموازات دا رسم کنید تا وقت

در مثلث ب ا د این تناسب حاصل میشود

ب د : د ح = ب ا : ا ز و مثلث ا ح ز بدلیل

سابق متساوی الساقین است یعنی ا ز = ا ح پس ب د : د ح = ا ب : ا ح

نتیجه — چون نقطه ا در سطح مثلث سیر کند بروجهی که نسبت ا ب به ا ح ثابت و برقرار باقی

ماند و آنرا ن فرض میکنیم دو خطی که در هر موضع ا دو زاویه ب ا ح و ه ا ح را نصف

کنند همواره مرور نمایند بر همان دو نقطه مشخصه د و ر زیرا که دو نسبت ب د/د ح و ب ر/ر ح

باز مساوی هستند با ن و باینحالت برقرار و چون دو خط ا د و ا ر منصف دو زاویه

مجاوره پیوسته بر یکدیگر عمود اند پس نقطه ا در جمیع حرکاتش باید واقع شود بر محیط دایره

که بر قطر د ر رسم شود و بنابراین مکان هندسی نقاطی که دو فاصله جمیع آنها

از دو نقطه ب و ح بر نسبت مفروض ثابتی باشد دایره است

حد — مثلثات متشابه آنانند که زوایاشان متساوی باشند و اضلاع متناظره

متناسب مقصود از اضلاع متقابله و متناظره آنها است که مقابل باشند بزوایای متساوی

ذوکثیرة الاضلاع متشابه آنانند که زوایاشان نظیر بنظیر متساوی باشد و اضلاع متقابلشان

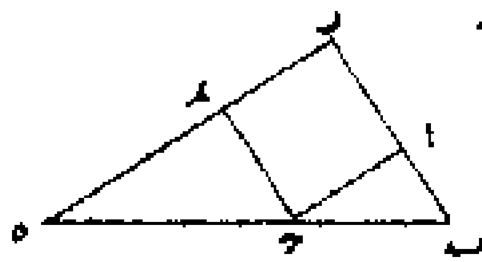
متناسب مقصود از اضلاع متقابله آنها است که مقابل باشند بزوایای متساوی

قضیه نوزدهم

در دو مثلث متساوی الزوایا اضلاع متناظره متناسب باشند

متشا

مثلاً دو مثلث مفروض ا ب ج و ج د ه
که زوایاشان نظیر بنظیر متساویست از اینقرار ب ا ج
= ج د ه و ا ب ج = د ج ه و ا ج ب = د ه ج
و میگوئیم که اضلاع متناظره از اینقرار متناسبند



ب ج : ج ه = ا ب : د ج = ا ج : د ه

برهان دو ضلع متناظر ب ج و ج ه را بر یک استقامت قرار میدهیم و دو ضلع ب ا و ه د را امتداد میدهیم تا بر نقطه و متلاقی شوند
آنوقت چون خط ب ج ه مستقیم است و زاویه ب ج ا = ج ه د ضلع ا ج موازی میشود با ه د و با و ا و همچنین چون زاویه ا ب ج = د ج ه خط ا ب موازیست با د ج
پس شکل ا ج د و متوازی الاضلاع است
در مثلث ب و ه خط ا ج موازیست با قاعده و ه و بنابرین (ح ۱) ب ج : ج ه = ب ا : ا و و چون بجای ا و مساویش ج د را قرار دهیم چنین شود

ب ج : ج ه = ب ا : ج د

در همان مثلث ب و ه چون ضلع ب و را قاعده فرض کنیم خط ج د موازیست با آن و بنابرین ب ج : ج ه = و د : د ه و چون بجای و د مساویش ا ج را قرار دهیم چنین میشود ب ج : ج ه = ا ج : د ه
پس نظر بنسبت مشترک ب ج : ج ه از دو تناسب مذکور این تناسب نتیجه میشود

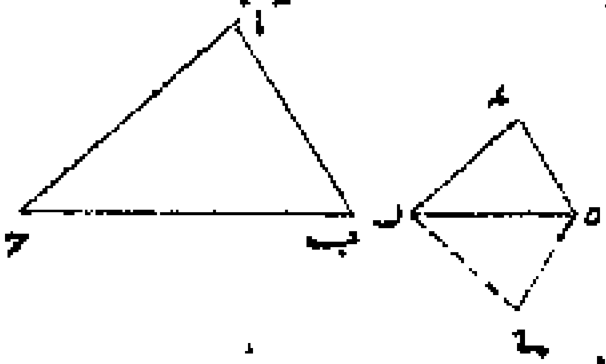
ا ج : د ه = ب ا : ج د

پس دو مثلث متساوی الزوایای ب ا ج و ج د ه اضلاع متقابلشان متناسب شد و بنا بر تعریف سابق متشابه باشند

نتیجه - پس شرط تشابه دو مثلث همین کافیست که دو زاویه اش نظیر بنظیر متساوی باشند زیرا که آنوقت زاویه سیم آنها نیز متساوی میشود و بعد اضلاع متناسب

قضیه بیستم

دو مثلث متناسب الاضلاع متساوی الزوایا باشند



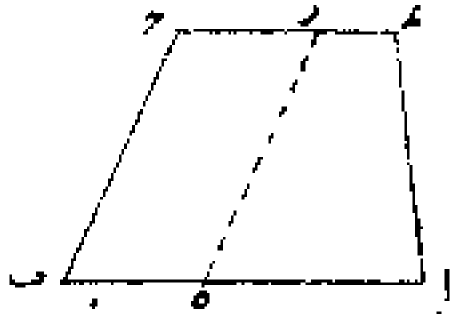
مثلاً بج : هد = اب : ده = اج : دط و میکوئیم دو مثلث اب ج و ده ط زوایا شان متساوی هستند یعنی ا = ط و ب = ه و ج = د

برهان - بر نقطه ه زاویه ده ح را مساوی ب رسم میکنیم و بر نقطه د زاویه ه د ح را مساوی ج و زاویه سیم ح خود مساوی شود با ا و دو مثلث اب ج و ه د ح متساوی الزوایا گردند پس بنا بر قضیه سابقه بج : هد = اب : ه ح و بنا بر فرض بج : هد = اب : ده و در این دو تناسب چون سه جمله مشترک است پس ه ح = ه ط و نیز بنا بر همان قضیه بج : هد = اج : د ح و بنا بر فرض بج : هد = اج : دط پس د ح = د ط پس اضلاع دو مثلث ه ح د و ه ط د نظیر بنظیر متساوی باشند و این دو مثلث متساوی و ۱۲ او‌ل و بعلاوه مثلث ه ح د را متساوی الزوایا ساختیم با مثلث اب ج پس دو مثلث ه ط د و اب ج نیز متساوی الزوایا باشند

شرح ۱ باید ملتفت شویم که زوایای متساویه دو مثلث مقابل باشند با اضلاع متناسبه

۲ - از این دو شکل چنین استنباط شد که تساوی زوایا لازم دارد تناسب اضلاع را و بالعکس تناسب اضلاع تساوی زوایا را بر وجهیکه در تحقق تشابه مثلثات وجود یکی از این دو شرط کافی باشد ولی این خاصیت مختص بمثلث باشد و در سایر اشکال که عدد

اضلاع شان نسبتی و رنگ نند چنین نیست مثلاً در ذو اربعه اضلاع می‌توان بدون تغییر زوایا نسبت اضلاع را تغییر داد و نیز بدون تغییر اضلاع مقدار زوایا را تغییر داد و از تساوی زوایا تناسب اضلاع لازم نیاید و عکس آن

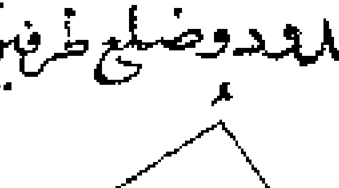


چنانچه اگر ه د را بموازات ب ج رسم کنیم زوایای ذو اربعه اضلاع ا ه د ج مساوی باشند با زوایای ذو اربعه اضلاع ا ب ج د ولی اضلاع بر یک نسبت نباشند و نیز بدون تغییر چهار ضلع اب و ب ج و ج د و د ا می‌توان دو زاویه ب و د را دور و نزدیک نمود و مقادیر جمیع زوایا را تغییر داد

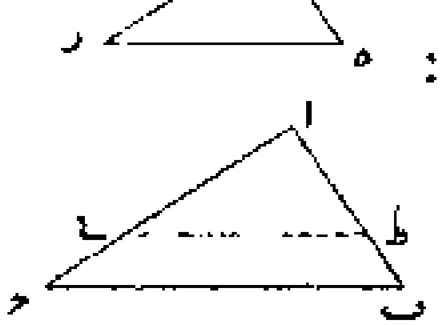
شرح ۳ - چون دو قضیه مذکور را که حکم یک شکل دارند ترکیب کنیم با شکل ۱۹ و ۲۰ پس این احکام مفیدتر و کثیر الاستعمال تر جمیع احکام اصول هندسه باشند و می‌توان گفت که از روی همین دو مسئله حکم جمیع مسائل حل شوند و در عملیات ما را کفایت کنند و نکته اش این است که هر شکل را می‌توان بمثلثات قسمت نمود و هر مثلث را بدو مثلث قائم الزاویه و از این قرار خواص کلیه مثلثات ضمناً دارا باشند خواص جمیع اشکال را

قضیهٔ بیست و یکم

هرگاه در دو مثلث یک زاویه مساوی باشد و دو ضلع طرفین متناسب باشند دو مثلث متشابه باشند



فرض میکنیم زاویه ا = د و نسبت اب : ده = اج : دو
میگوییم مثلث اب ج شبیه است بمثلث ده و



برهان اط را مساوی ده جدا میکنیم و طی را بموازات ب ج رسم میکنیم پس زاویه اطی مساوی شود بزاویه

اب ح و ده‌ز را و مثلث اطح زوایایش مساوی میشود با زوایای مثلث اب ح پس

اب : اط = اح : اح ولی بفرض اب : ده = اح : دز و بجعل اط = ده پس این دو

تناسب در سه جمله مشترکند و بنابراین اح = دز پس در دو مثلث اطح و ده‌ز

دو ضلع و زاویه بینهما متساوی است و این دو مثلث متساوی باشند و چون مثلث

اطح شبیه است بمثلث اب ح پس ده‌ز نیز شبیه باشد بمثلث اب ح

قضیه بیست و دوم

هر دو مثلث که اضلاع شان متوازی باشند یا عمود بر همدیگر متشابه‌اند

برهان فرض میکنیم ا ب ح زوایای یکی از دو مثلث باشد و ا' ب' ح' زوایای

مثلث دیگر

و میدانیم که اضلاع دو زاویه هرگاه متوازی باشند یا عمود نسبت بهم اند دو زاویه متساوی

باشند یا متمم همدیگر پس فرضهای ممکنه منحصر باشد در یکی از این سه صورت

اولاً ا + ا' = ۲ق و ب + ب' = ۲ق و ح + ح' = ۲ق

ثانیاً ا + ا' = ۲ق , ب + ب' = ۲ق و ح = ح'

ثالثاً ا = ا' و ب = ب' و بنابراین ح = ح'

بر فرض اول مجموع زوایای دو مثلث مساوی میشود بشش قائمه

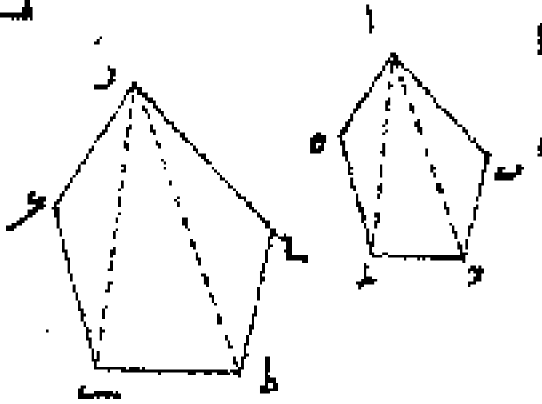
و بر فرض دوم مجموع از چهار قائمه تجاوز کند

پس همان فرض سیم صحیح و معقول باشد و بنابراین دو مثلث متساوی الزوایا و آنوقت متشابه

تبصره در این شکل اضلاع متناظره دو مثلث آنها باشند که متوازیند یا عمود بر همدیگر

قضیه بیست و سیم

دو کثیر الاضلاع متشابه را میتوان قسمت کرد بعددی از مثلثها متشابه و متشابه الوضع



برهان در کثیر الاضلاع ا ب ج د ه از زاویه ا دو قطر ا ج و ا د را بزوایای غیر مجاوره وصل میکنیم و در کثیر الاضلاع دیگر ر ح ط ی ک نیز همچنان از زاویه نظیر ا دو قطر ر ط و ر ی را وصل میکنیم آنوقت نظر بتشابه دو کثیر الاضلاع زاویه ا ب ج = نظیر خود ر ح ط و دو ضلع ا ب و ب ج متناسب باشند با نظیر خود ر ح و ح ط یعنی ا ب : ر ح = ب ج : ح ط یعنی دو مثلث یک زاویه مساویست و دو ضلع طرفین متناسب پس متشابه باشند و زاویه ب ج ا مساوی شود با ح ط ر و چون این دو زاویه تقسیم از دو زاویه متساوی ب ج د و ح ط ی باقی میماند ا ج د = ر ط ی و حال ذکر شد که نظر بتشابه دو مثلث ا ب ج و ر ح ط نسبت ا ج : ر ط = ب ج : ح ط و نظر بتشابه دو کثیر الاضلاع ب ج : ح ط = ج د : ط ی پس بسبب اشتراک نسبت ا ج : ر ط = ج د : ط ی و قبل از این ملاحظه شد که زاویه ا ج د = ر ط ی پس دو مثلث ا ج د و ر ط ی نیز دارای یک زاویه مساوی و دو ضلع طرفین متناسب اند و بنا بر این متشابه باشند و بهمین وجه ثابت میکنیم که سایر مثلثات هم بترتیب متشابه اند و از اینقرار دو کثیر الاضلاع متشابه مرکب باشند از عده واحده از مثلثات متشابهه و متشابهة الوضع

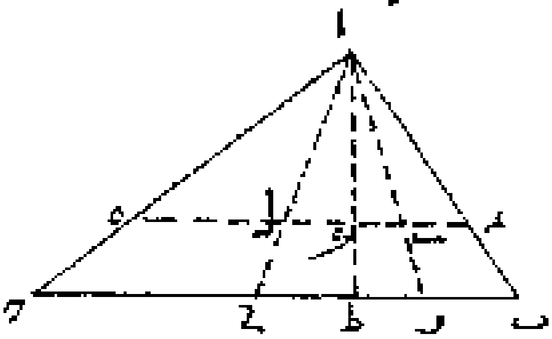
شرح - عکس قضیهٔ مذکوره نیز صحیح است یعنی اگر دو کثیر الاضلاع مرکب باشند از یک عده از مثلثات متشابهه و متشابهة الوضع متشابهند زیرا که از تشابه مثلثات متشابه نتیجه میشود که ا ب ج = ر ح ط و ب ج ا = ح ط ر و ا ج د = ر ط ی پس ب ج د = ح ط ی و هکذا ج د ه = ط ی ک و غیره و علاوه بر آن از تناسب اضلاع مثلثات این تناسب نتیجه شود ا ب : ر ح = ب ج : ح ط

= اج : وط = جد : طب وغیره پس زوایای و کثیر الاضلاع متساوی شدند
و اضلاعشان متناسب و بنا براین متشابهند

قضیهٔ بیست و چهارم

خطوط اد و اط وغیره که از راس مثلث بقاعده اش ب ج وصل شوند
انقاعده و موازیش ده را بیک نسبت قطع کنند این تناسب نتیجه شود
دح : ب د = حل : وط = لن : طج وغیره

برهان خط ده چون موازیست با ب ج دو مثلث ادح و ابد متساوی
الزوایا باشند و بنا براین دح : ب د = اح : اد و همچنین نظر بتوازی حل و وط این



تناسب حاصل شود اح : اد = حل : وط
و بسبب اشتراک نسبت اح : اد ازاین تناسب حاصل
شود دح : ب د = حل : وط
و بهمان جهت این تناسب حاصل شود حل :
وط = لن : طج و بکذا پس خط ده قسمت شده است بر نقاط ح و ل و ن بهمان
نسبت که خط ب ج بر نقاط د و ط و ج قسمت شده

نتیجه پس اگر ب ج را بر نقاط د و ط و ج باجزای متساویه قسمت کنیم موازیش ده
نیز باجزای متساویه قسمت شود بر نقاط ح و ل و ن

قضیهٔ بیست و پنجم

چون از زاویه قائمه ا از مثلث قائم الزاویه ب اج عمود اد را بر وتر اخراج کنیم گوئیم
اولاً دو مثلث جزء ا ب د و ا د ج متشابهند و متشابه با مثلث کل
ثانیاً هر کدام از دو ضلع اب و اج واسطه هندسی باشند ما بین وتر ب ج