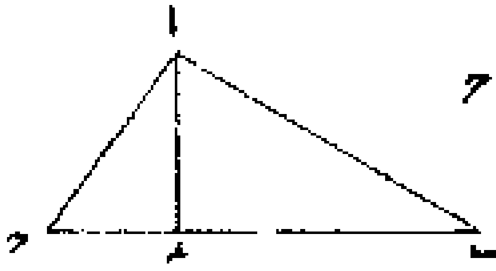
و قطعه مجاوره خود ب د یا د ج

ثالثاً عمود ا د واسطه هندسی باشد ما بین دو قطعه ب د و د ج

برهان اولاً دو مثلث ب ا د و ب ا ج مشارکند




در زاویه ب و علاوه بر آن دو زاویه ب د ا و ب ا ج

قائمه‌اند پس زاویه سیم هم از مثلث اول مساوی

باشد با زاویه ج از مثلث دیگر و این دو مثلث متساوی

الزوایا باشند و متشابه و بهمین طور ثابت میکنیم که مثلث د ا ج شبیه است بمثلث

ب ا ج پس این سه مثلث متساوی الزوایا باشند و متشابه

ثانیاً چون مثلث ب ا د شبیه شد بمثلث ب ا ج اضلاع متناظرشان متناسب باشند

و ضلع ب د از مثلث کوچک نظیر با ب ا از مثلث بزرگ چون مقابلند بدو زاویه

متساویه ب ا د و ب ج ا و وتر ب ا از مثلث کوچک نظیر است با وتر ب ج از مثلث بزرگ

پس این تناسب صورت بندد ب د : ب ا = ب ا : ب ج و همچنین د ج : ا ج =

ا ج : ب ج پس معلوم شد که هر کدام از دو ضلع ا ب و ا ج واسطه هندسی باشند

ما بین وتر و قطعه مجاوره خود

ثالثاً ـ بمشابهت دو مثلث ا ب د و ا د ج و مقابله اضلاع متناظره آنها این تناسب

حاصل شود ب د : ا د = ا د : د ج پس عمود ا د واسطه هندسی باشد مابین دو قطعه ب د و د ج و

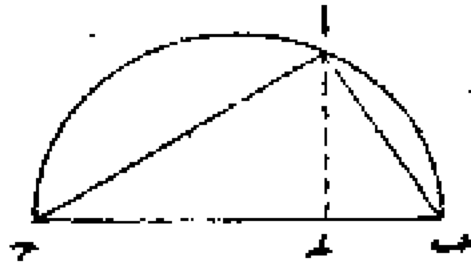
شرح ـ در تناسب ب د : ا ب = ا ب : ب ج چون سطح طرفین را معادل کنیم با سطح وسطین

چنین میشود اب$^2$ = ب د × ب ج و همچنین اج$^2$ = د ج × ب ج و بعد از جمع دو تساوی

اب$^2$ + اج$^2$ = ب د × ب ج + د ج × ب ج و جزء ثانی باین صورت تحویل میشود (ب د + د ج)

× ب ج = ب ج × ب ج = بج$^2$ پس اب$^2$ + اج$^2$ = بج$^2$ یعنی مربع وتر ب ج مساوی

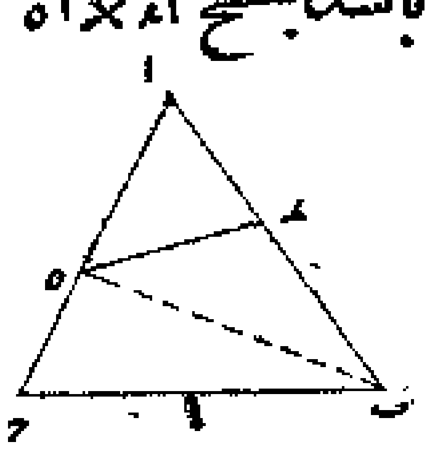
با مجموع دو مربع دو ضلع دیگر اب و اج پس بعد ج ب مساوی دو بار رسیدیم شکل عروس
پس معلوم میشود که در مثلثات متساویة الزوایا خاصیت شکل عروس لازمه تناسب
اضلاع است




نتیجه چون از نقطه ا محیط دایره دو وتر اب و اج
را بطرفین قطر ب ج وصل کنیم مثلث ب اج
قائم الزاویه میشود بر نقطه ا (١٩ اول)
پس اولاً عمود اد واسطه هندسی باشد مابین دو قطعه ب د و د ج قطر
دایره و بعبارت اخری مربع اد مساوی باشد با مسطح ب د × د ج
ثانیاً وتر اب واسطه هندسی باشد مابین قطر ب ج و قطعه ب د و بعبارت
اخری اب$^2$ = ب د × ب ج و همچنین اج$^2$ = ج د × ج ب پس اب$^2$ : اج$^2$ = ب د :
د ج و چون اب$^2$ را به ب ج$^2$ بسنجیم این تناسب نتیجه شود اب$^2$ : ب ج$^2$ = ب د :
ب ج و همچنین اج$^2$ : ب ج$^2$ = د ج : ب ج و این نسبتها همان نتایج است که سابق در قضیه ١١ ذکر شد

## قضیه بیست و ششم

هر دو مثلث که دارای یک زاویه مساوی باشند نسبتشان بهمدیگر
مثل نسبت دو مسطح اضلاعی است که حاوی آن زاویه اند مثلاً نسبت مثلث
اب ج بمثلث اده مثل مسطح اب × اج باشد بمسطح اد × اه
برهان ب ه را وصل کنید آنوقت دو مثلث
اب ه و اده مشارکند در راس ه و در
ارتفاع واحد اند پس نسبت دو قاعده اب
و اد باشند بدینصورت



اب ه : اد ه = اب : اد　　وبهمانوجه این تناسب حاصل شود

اب ج : اب ه = اج : اه

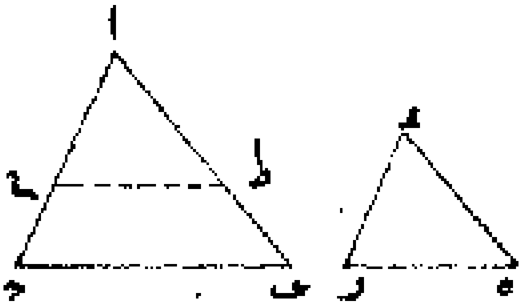
وبعد از ضرب دو تناسب و حذف جملهٔ مشترکه اب ه این تناسب حاصل شود

اب ج : اد ه = اب × اج : اد × اه

نتیجه - پس اگر سطح اب × اج مساوی باشد با سطح اد × اه و بعبارت اخری اب : اد = اه : اج دو مثلث معادل همدیگر میشوند و اینحالت وقتی اتفاق افتد که خط دج موازی شود با به

## قضیهٔ بیست و پنجم

دو مثلث متشابه بر نسبت دو مربع هر دو ضلع متناظر باشند



برهان - زاویه ا = د و زاویه ب = ه

پس اول نظر بتساوی دو زاویه ا و د بنا بر قضیه

اب ج : د ه ر = اب × اج : د ه × د ر

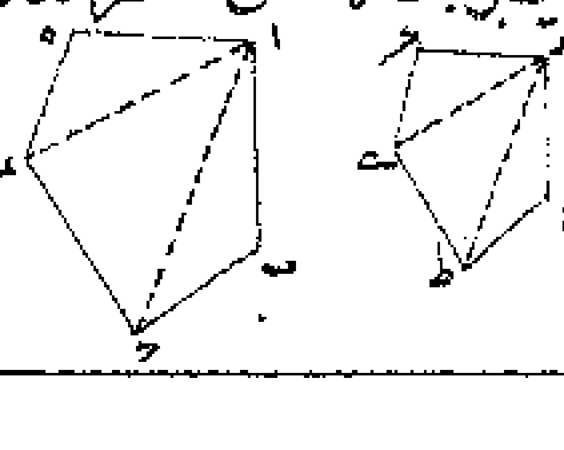
و آنرا بدل کنیم باین صورت $\frac{\text{اب ج}}{\text{د ه ر}} = \frac{\text{اب}}{\text{د ه}} \times \frac{\text{اج}}{\text{د ر}}$

و نظر بتشابه دو مثلث این تساوی حاصل شود $\frac{\text{اج}}{\text{د ر}} = \frac{\text{اب}}{\text{د ه}}$ پس $\frac{\text{اب ج}}{\text{د ه ر}}$

$= \frac{\text{اب}}{\text{د ه}} \times \frac{\text{اب}}{\text{د ه}} = \frac{\overline{\text{اب}}^2}{\overline{\text{د ه}}^2}$

## قضیهٔ بیست و ششم

دو کثیر الاضلاع متشابه و محیط بر نسبت هر دو ضلع متناظر اند و دو سطح بر نسبت دو مربع اند دو ضلع



برهان اولا بنا بر تعریف اشکال متشابه

اب : ح ی = ب ج : ی ط =

= ود : طـ وغیره واز ترکیب این نسب متساویه چنین استنباط شود که نسبت مجموع
مقدمات اب + بو + ود .... یعنی محیط شکل اول بمجموع توالی حیا + یط +
طـ وغیره یعنی محیط شکل ثانی مثل یکی از مقدمات است بتالی خود مثل اب : حیا

ثانیاً - نظر بتشابه دو مثلث ابح و حیط این تناسب حاصل شود (۲۷)

ابح : حیط = اح^۲ : حط^۲ وهکذا در دو مثلث احد و حطـ این تناسب^احد
حطـ = اد^۲ : حط^۲ و بسبب اشتراک نسبت اح^۲ : حط^۲ این تناسب حاصل شود

ابح : حیط = احد : حطـ وبهمین نوع ثابت میکنیم که احد : حطـ = اده :
حـلـ وهکذا در آنصورت که عدد مثلثات از سه تجاوز کند پس بترکیب تناسب آخر
نسبت مجموع مقدمات ابح + احد + اده ... یعنی مساحت کثیر الاضلاع
ابود بمجموع توالی حیط + حطـ + حـلـ ... یعنی مساحت کثیر الاضلاع
دوم مثل مقدار ابح است بتالی خود حیط یا مثل اب^۲ : حی^۲
پس مساحت دو کثیر الاضلاع متشابه بر نسبت دو مربع هر دو ضلع متناظر باشند

نتیجه - هرگاه سه شکل متشابه بترتیب رسم بر وجهی که سه ضلع متناظر شان سه
ضلع مثلث قائم الزاویه باشد پس شکل مرسوم بر ضلع طول مثلث مساوی باشد
با مجموع دو شکل مرسوم بر دو ضلع دیگر مثلث زیرا که این سه شکل بر نسبت مربعات
اضلاع متناظره اند و یکی از این مربعات مساوی است با مجموع دو مربع دیگر فهو المطلوب

## قضیه بیست و نهم (۲۹)

در دایره احبد اجزای دو وتر متقاطع اب و حد متناسب باشند
بر تناسب معکوس باینصورت اه : ده = حه : هب
برهان - دو خط اح و بد وصل کنید آنوقت در دو مثلث احه و بده

دو زاویه ه چون متقابله بر رأس اند متساوی‌اند شده و دو زاویه ا و د چون محیطیه اند و واقع
در یک قطعه متساوی باشند (۱۹ و ۲) و همچنین دو زاویه
ح و ب پس این دو مثلث متشابه باشند و اضلاع متناظره متناسب با این صورت

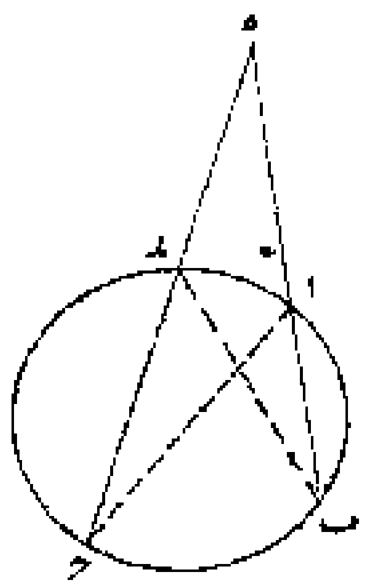
ا ه : د ه = ح ه : ه ب

نتیجه - از تناسب مذکور این تساوی نتیجه شود ا ه × ه ب = د ه × ح ه
یعنی که مسطح دو جزء وتری مساوی است با مسطح دو جزء وتر دیگر

## قضیهٔ سی‌ام [۳۰]

چون از نقطهٔ ه واقعه در خارج دایره دو خط قاطع ه ب و ه ح را رسم کنیم
و منتهی غایت هر دو را به قوس مقعر ب ح پس تمام اند و خط متناسب باشند
بر نسبت عکس با دو جزء خارج خود بر وجهی که این تناسب صورت گیرد

ه ب : ه ح = ه د : ه ا



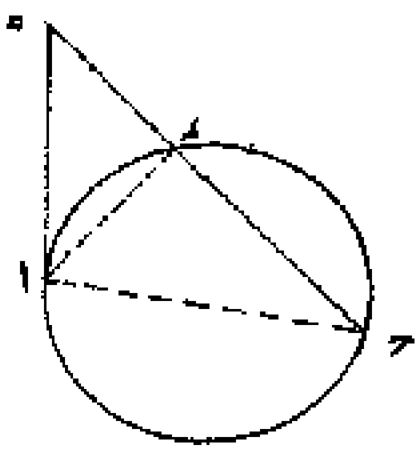

برهان - چون دو خط ا ح و ب د را وصل کنیم
دو مثلث ه ا ح و ه د ب مشارک باشند
در زاویه ه و علاوه بر آن زاویه ب = ح
(۱۹ و ۲) پس متشابه باشند و اضلاع متقابله
آنها متناسب با این صورت ه ب : ه ح = ه د : ه ا

نتیجه - از تناسب مذکور چنین نتیجه می‌شود که مسطح ه ا × ه ب مساوی است با مسطح
ه ح × ه د

شرح - دو شکل مذکور کمال مشابهت دارند و اختلافی ندارند جز از این حیثیت که در شکل اول
تقاطع دو وتر ا ب و ح د در داخل دایره واقع شده و در شکل ثانی در خارج

## قضیهٔ سی و یکم ۳۱

چون از نقطهٔ ه واقعه در خارج دایره خط ه ا را مماس کنیم و ه د را قاطع
خط مماس بواسطه هندسی باشد مابین تمام قاطع و جزو خارجی خود بنوعی
که این تناسب حاصل شود ه د : ه ا = ه ا : ه ب و بعبارت اخری ه ا^۲ = ه د × ه ب

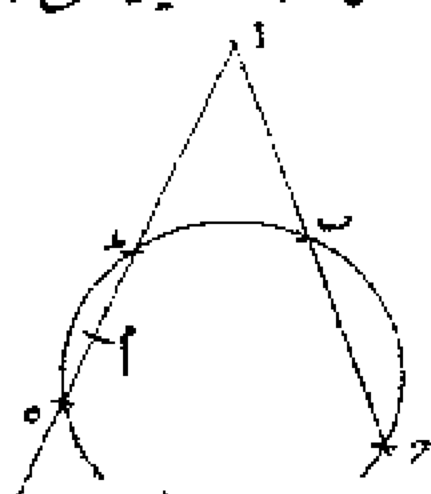


بوتها بعد از وصل دو خط ا د و ا ب دو مثلث ه ا د
و ه ا ب مشارک میشوند در زاویه ه و علاوه بر آن
زاویه ه ا ب حادثه مابین مماس و وتر مقیاسش نصف
قوس ا ب است و زاویه د نیز بهمان مقیاس
است پس زاویه د = ه ا ب پس دو مثلث متشابه
باشند و این تناسب است ه د : ه ا = ه ا : ه ب یا ه ا^۲ = ه د × ه ب

شرح - این شکل نیز از شکل سابق استنباط شود بنابر آنکه مماس ه ا را حد اوضاع خط
قاطع متحرک در حول نقطه ه دانیم

## قضیهٔ سی و دوم ۳۲

چون بر خط ا د و ا ه متقاطع بنقطه ا چهار نقطه ب و ج و د و ه را برو
اختیار کنیم که اج × اب = اد × اه گوئیم این چهار نقطه بر محیط دایره واقع باشند

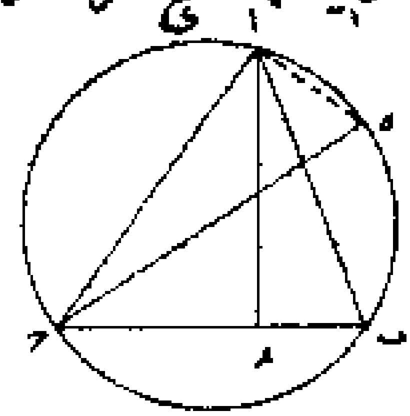


بوتها اگر گوئیم دایره مارّه بر سه نقطه ج و ب و د
قاطع خط ا ه است بر نقطه م نه بر نقطه ه آنوقت
این تساوی حاصل شود اب × اج = اد × ام و بنا
بر فرض اب × اج = اد × اه پس این تساوی مستنبط
شود اد × ام = اد × اه و این حکم صحیح نیست

و اگر بگوییم دایره بار دیگر به سه نقطهٔ ح و ب و د مماس میکرد خط اه را بر نقطهٔ ه این
تساوی حاصل میشد اب × اح = اد² و بنا بر فرض اب × اح = اه × اه پس اد = اه

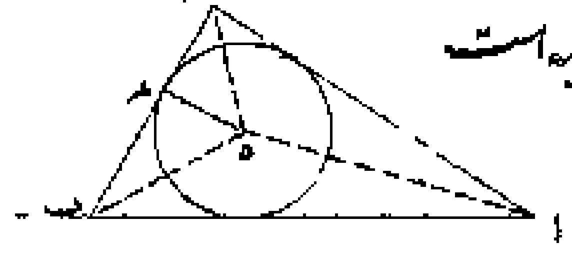
## قضیۀ سی و سیم ۳۳

در مثلث اب ح مسطح دو ضلع اب و اح مساویست با مسطح قطر ح ه از دایرهٔ محیطیه و عمود اد وارد بر ضلع سیم ب ح



برهان بعد از وصل اه دو مثلث اب د و اح ه قائم الزاویه میشوند یکی بر د و دیگر بر ح و علاوه بر این زاویهٔ ب = ه پس این دو مثلث متشابه باشند
و این تناسب نتیجه شود اب : ح ه = اد : اح و بعد این تساوی اب × اح = ح ه × اد
فلیجب - طرفین این تساوی را در ب ح ضرب میکنیم چنین میشود اب × اح × ب ح = ح ه × اد × ب ح
و چون اد × ب ح مضاعف سطح مثلث است پس حاصل ضرب سه ضلع هر مثلث مساوی باشد با حاصل ضرب مساحتش در مضاعف قطر این محیطیه
و حاصل ضرب سه خط انظر بالجمله بعد از این اگر خواهید حکم سیم و تقدیرش بر این وجه باشد
که آن خطوط را با عدد مبدل کنیم و بعد در یکدیگر ضرب نمائیم

شرح این حکم نیز محقق است که مساحت هر مثلث مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف شعاع دایرهٔ محاطیه در آن مثلث
برهان مثلثات اه ب و ب ه ح و اه ح مشارکند



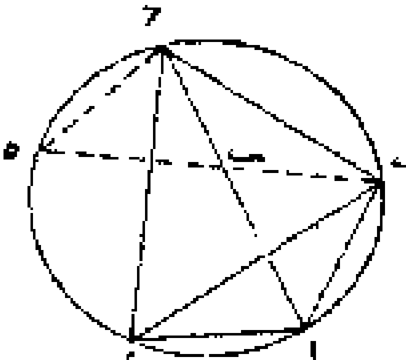
در راس ه و ارتفاع همه شعاع دایرهٔ محاطیه است
پس مجموع این مثلثات مساویست با سطح
مجموع قواعد اب و ب ح و اح

در نصف شعاع ه د پس مساحت مثلث اب ج مساوی است با دوره آن در نصف شعاع دایره محاطیه

## ۱۳۴ قضیهٔ سی و چهارم

در ذوات اربعة الاضلاع محاطیه اب ج د مسطح دو قطر ا ج و ب د مساوی است با مجموع دو مسطح هر دو ضلع متقابل بر وجهیکه این تساوی حاصل شود ا ج × ب د = اب × ج د + ا د × ب ج

برهان ج ه را مساوی ا د جدا کنید و وصل نمائید ب ه را تا قطع کند قطر ا ج شکل را بر نقطه ح آنوقت زاویه اب د = ج ب ح چونکه مقیاس یکی نصف ا د است و مقیاس دیگر نصف ج ه = ا د و زاویه ا د ب = ب ج ح چونکه هر دو محاطیه اند در قوس اب پس مثلث اب د مشابه باشد با مثلث ح ب ج و از تناسب نتیجه شود ا د : ج ح = ب د : ب ج و بعد این تساوی ا د × ب ج = ج ح × ب د




حال گوئیم مثلث اب ح مشابه است با مثلث ب د ج چونکه قوس ا د مساوی است با ج ه و بعد از آنکه ه د را بر طرفین جدا کنیم قوس ا ه مساوی شود با د ج پس زاویه اب ح = د ب ج و علاوه بر آن زاویه ب ا ح = ب د ج چون محاطیه اند در یک قوس پس دو مثلث اب ح و د ب ج متشابه باشند و اضلاع متقابله متناسب باین صورت اب : ب د = ا ح : ج د و بعد این تساوی اب × ج د = ا ح × ب د

حال چون دو تساوی بدست آمده را با هم جمع کنیم و ملاحظه نمائیم که ا ح × ب د + ج ح × ب د = (ا ح + ج ح) × ب د = ا ج × ب د تساوی مقصود بدست آید از این قرار

ا د × ب ج + اب × ج د = ا ج × ب د ق ا

## قضیهٔ سی و پنجم

دو قطر هر ذوات الاربعة الاضلاع محاطیه بر نسبت دو مجموع مسطحات اضلاع باشند که منتهی شده اند باطراف آن دو قطر

برهان در شکل سابق ذوات الاربعة الاضلاع ا ب ج د را قطر اج بدو مثلث اب ج و اد ج قسمت نموده و چون شعاع دایرهٔ محیطه را ن فرض کنیم این دو تساوی نتیجه شود (۳۳)

اب × ب ج × اج = ۴ ن × ا ب ج

اد × د ج × اج = ۴ ن × ا د ج

و بعد از جمع چنین شود اج (اب × ب ج + اد × د ج) = ۴ ن × اب ج د و چون بقطر ب د همان ذوات الاربعة الاضلاع را بدو مثلث قسمت کنیم بهمان وجه این تساوی حاصل شود

ب د (اب × اد + ب ج × د ج) = ۴ ن × اب ج د

و بعد اج × (اب × ب ج + اد × د ج) = ب د × (اب × اد + ب ج × د ج)

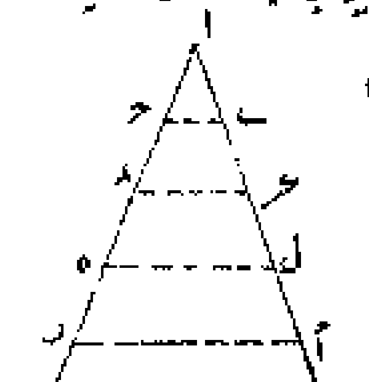
و از آن تساوی این تناسب نتیجه شود

اج : ب د = اب × اد + ب ج × د ج : اب × ب ج + اد × د ج

## در مسائل متعلقه بمقالهٔ سیم

### مسئلهٔ اول

میخواهیم خط مفروضی را باجزای متناسبه قسمت کنیم بنسبت خطوط معینه

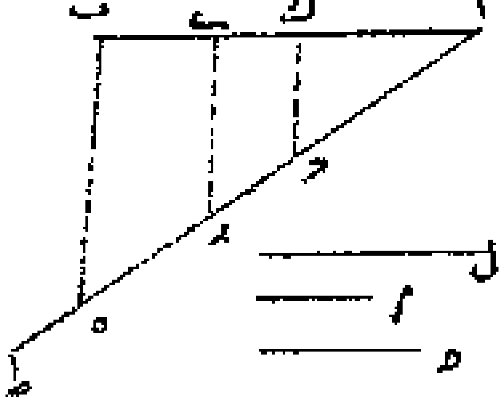


اولاً میخواهیم خط اب را به پنج جزو متساوی قسمت کنیم پس بر طرف خط غیر معین الوضع اح را مرور میدهیم و قطعه از آن بقدر اج مثلا جدا میکنیم و از آن پنج مرتبه تا ح نقل میکنیم و نقطهٔ ح را بطرف ب وصل میکنیم و بعد ج ح را

بموازات ا ب رسم کنیم و میگوئیم ا ح خمس خط ا ب است و چون آنرا پنج مرتبه بر ا ب
نقل کنیم آنخط بر پنج جزو متساوی قسمت شود

برهان چون د ب موازیست با ح ب دو ضلع ا ع و ا ب بر دو نقطه ح و ب
بر یک نسبت قسمت شوند و ع ا و ا ح خمس ا ع است پس ا ح نیز خمس ا ب است

ثانیاً میخواهیم ا ب را بر نسبت خطوط ل و م و ن

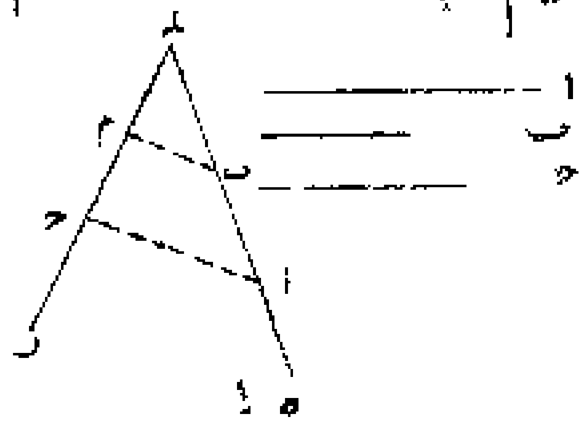


قسمت کنیم پس بر طرف ا خط غیر معین ا ط را رسم کنیم
و ا ح را مساوی ل جدا میکنیم و ح د را مساوی م
و د ه را مساوی ن و نقطه ه را به ب وصل میکنیم
و بر ح و د دو خط ح ک و د ی را بموازات
ه ب رسم میکنیم و میگوئیم خط ا ب قسمت شده است باجزای ا ک و ک ی و ی ب بر
نسبت خطوط ل و م و ن

برهان نظر بموازی خطوط ح ک و د ی و ه ب اجزای ا ک و ک ی و ی ب
متناسب باشند با اجزای ا ح و ح د و د ه و ع ا و بعلاوه اجزای اخیر مساوی خطوط
مفروضه ل و م و ن جدا نموده بودیم

## مسئله دوم

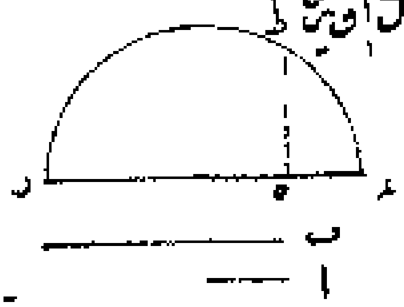
سه خط ا و ب و ح مفروض است میخواهیم خط چهارم متناسبه آنها را معلوم نمائیم



دو خط د ه و د ف را بزاویه رسم کنید
و از د ه جزء د م را مساوی ا جدا کنید
و د ب را مساوی ب و از د ف جزء د ح
را مساوی ح جدا کنید و خط ا ح را وصل

کنید و از نقطهٔ ب خط ب م را موازی ا ح رسم کنید پس د م چهارم متناسب مطلوب باشد
برهان چون ب م موازیست با ا ح این تناسب حاصل شود د ا : د ب = د ح : د م
و سه جزو اول این تناسب را مساوی سه خط مفروض جدا کرده ایم پس د م جزو مطلوبست
نتیجه هرگاه دو خط ا و ب مفروض باشد جزو سیم تناسبش را بهمین وجه معلوم کنیم چونکه
جزو چهارم باشد از سه خط ا و ب و ب

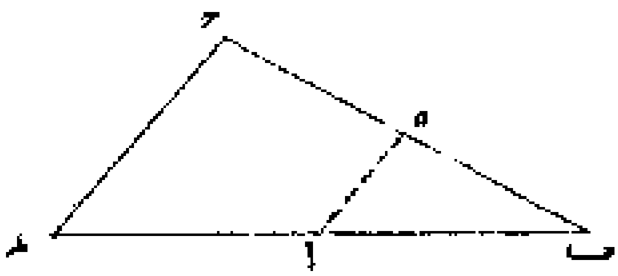
## مسئلهٔ سیم ۳

مطلوبست پیدا کردن واسطهٔ هندسی مابین دو خط ا و ب بطریق ذیل

از خط غیر معین د ح جزو د ه را مساوی ا جدا کنید
و ه و را مساوی ب و بر قطر د و نصف دایره
د ط و را رسم کنید و از نقطهٔ ه عمود ه ط را بر قطر
اخراج کنید و امتداد دهید تا به نقطهٔ ط بدایره منتهی شود پس طول ه ط واسطهٔ مطلوبست
برهان عمود ط ه وارد از نقطهٔ ط محیط بر قطر واسطهٔ هندسی باشد مابین دو قطعهٔ د ه و
قطر و ص ۲ و این دو قطعه را مساوی دو خط مفروض ا و ب جدا ساخته بودیم
وجه دیگر د و را مساوی ب جدا کنید و د ه را مساوی ا و بر قطر د و دایره
رسم کنید و ه ط را عمود کنید بر د و و نقطهٔ ط را وصل کنید بنقطهٔ د پس خط ط د واسطهٔ
هندسی باشد مابین ب و ا
وجه سیم در شکل ص ۳۱ خط ه و را مساوی ب جدا کنید و ه د را مساوی ا
و بر دو نقطهٔ د و و دایرهٔ مرور دهید و از نقطهٔ ه خط ه ا را مماس بر آن دایره کنید پس
طول ه ا واسطهٔ هندسی باشد مابین ب و ا

## مسئلهٔ چهارم ۴

میخواهیم در زاویه ب ج د خط ب د را بر نقطه ا چنان مرور دهیم که دو قطعه اب و اد واقعه ما بین او و دو ضلع زاویه متساوی شوند

از نقطه ا خط اه را بموازات دج رسم کنید و ه ب را مساوی ه ج جدا کنید و خط ب ا د را بر دو نقطه ب و ا مرور دهید



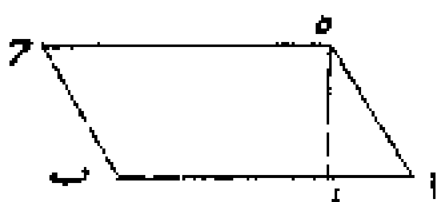
و آن خط مطلوب است

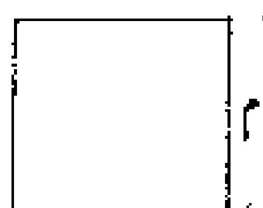
برهان چون اه موازیست با ج د

نسبت ب ه : ه ج = ب ا : ا د و بعلت ب ه = ه ج پس ب ا = ا د

## مسئله پنجم

میخواهیم مربعی معادل متوازی الاضلاع یا مثلث مفروضی رسم کنیم



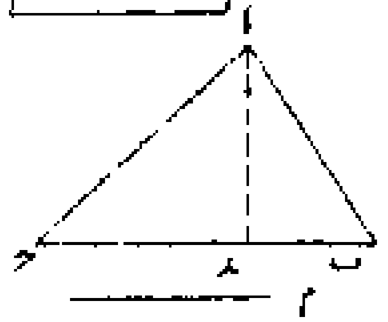


اولاً اب قاعده متوازی الاضلاع است و ه د ارتفاع آن و م ضلع مربع مطلوب پس باید این تساوی حاصل شود

$\text{م}^{2}$ = اب × د ه

یا اب : م = م : د ه

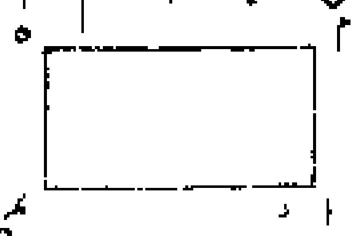
یعنی که ضلع مربع واسطه هندسی باشد ما بین اب و د ه

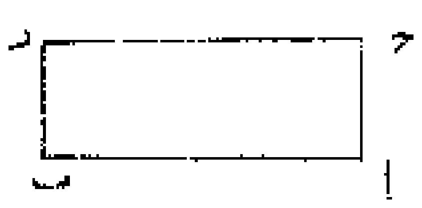


ثانیاً بهمین جهة معلوم میشود که ضلع مربع معادل با مثلث مفروض واسطه هندسی باشد ما بین قاعده آن مثلث و نصف ارتفاعش

## مسئله ششم

میخواهیم بر خط اد مسطح ادهم را معادل با مسطح مفروض اب ج د رسم کنیم





ا م ارتفاع مجهول مسطح ادهم است چون دو سطح

باید متعادل باشند این تساوی نتیجه میشود اد × ام = اب × اج و بعد این تناسب
اد : اب = اج : ام پس خط مطلوب چهارم جزو متناسب شد در سه خط اد و اب و اج

## مسئلهٔ هفتم

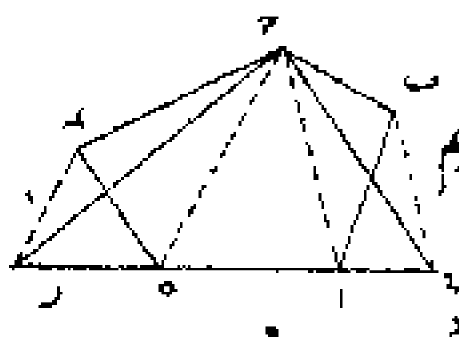
میخواهیم دو خط بدست آوریم بر نسبت مساحت دو مسطح مفروض اوب دو بعد مسطح اول باشد و ج و د دو بعد ثانی و یکی از دو خط مطلوب طولش اختیاری است و آنرا ا فرض میکنیم و خط مجهول ثانی را م پس مافوق صورت مسئله این تناسب حاصل میشود

ا × ب : ج × د = ا : م

و بعد م = (ا × ج × د)/(ا × ب) = (ج × د)/ب

پس خط مطلوب جزو چهارم متناسب شد در سه خط ب و ج و د

## مسئلهٔ هشتم




میخواهیم مثلثی معادل کثیر الاضلاعی رسم کنیم
شکل اب ج د ه کثیر الاضلاع مفروض است پس
قطر ج ه را وصل کنیم و آن مثلث ج د ه را جدا سازد
و بر نقطه د خط د ز را بموازات ج ه رسم کنید تا استقامت اه را بر نقطه ز
قطع کند و ج ز را وصل کنید پس کثیر الاضلاع اب ج د ه معادل شود با کثیر الاضلاع
اب ج ز که یک ضلع کمتر دارد

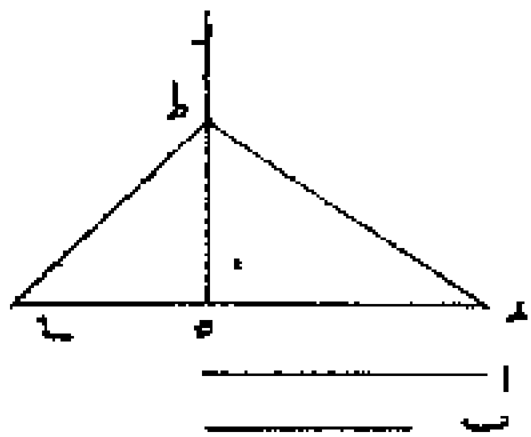
زیرا که دو مثلث ج د ه و ج ز ه بر قاعده مشترک ج ه باشند و نیز ارتفاع واحد
چونکه دو رأس آنها د و ز واقع باشند بر خط د ز که بموازات قاعده است پس این
دو مثلث متعادل باشند و چون بر طرفین شکل اب ج ه را اضافه کنیم یک طرف کثیر الاضلاع
اب ج د ه ترکیب شود و از طرفی کثیر الاضلاع اب ج ز و این دو متعادل گردند

وهمچنین میتوان زاویه ب را از میان برد بطوریکه مثلث اب د را مبدل کنیم بمثلث
معادل آن ا ج د و از این قرار دو خمس اضلاع ابجده مبدل شود بمثلث معادل ی د ج
این قاعده کلی است که بجمیع اشکال تعلق گیرد چونکه در هر عمل واحدی از عدد اضلاع کم شود
و عاقبت میرسیم بمثلثی که معادل باشد با شکل مفروض

شرح - سابق ذکر شد که هر مثلث را میتوان بمربع تحویل نمود (مسئله ۵) پس بعد از مسئله
مذکوره جمیع اشکال مستقیمة الخطوط را میتوان بمربع تحویل کرد و چنین عمل را تربیع شکل گویند
و مسئله تربیع دائره اینست که مربعی بدست آوریم معادل با سطح دائره معلوم القطر

## مسئله نهم

میخواهیم مربعی ترتیب دهیم که مساوی باشد با مجموع یا با تفاضل دو مربع معلوم




ا و ب دو ضلع دو مربع مفروض باشد
اولاً اگر بخواهیم مربعی مساوی با مجموع این دو مربع رسم کنیم
دو خط ه د و ه ز را بزاویه قائمه رسم کنند و
ه د را مساوی ا جدا کنند و ه ط را مساوی ب و
خط د ط را وصل کنند خط ضلع مربع مطلوب باشد

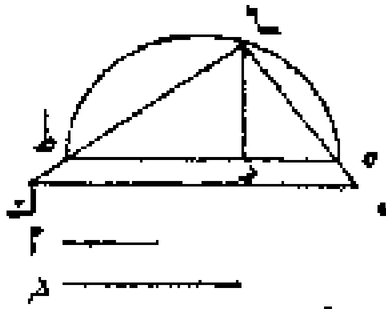
ثبوتها مثلث د ه ط چون قائم الزاویه است مربع د ط مساوی باشد با مجموع دو مربع ه د و ه ط
ثانیاً اگر بخواهیم مربعی مساوی با تفاضل دو مربع رسم کنیم باز بطریق مذکور زاویه قائمه د ه ج
ترتیب دهید و ط ه را مساوی با اقصر دو ضلع ا و ب جدا کشید و از مرکز ط و بشعاع ط
مساوی با ضلع دیگر قوسی رسم کنید تا ه ج را بر نقطه ی قطع کند و مربع ه ی مساوی شود
بتفاضل دو مربع ا و ب زیرا که چون مثلث ط ه ی قائم الزاویه است و وتر ط ی = ا
جدا شده و ضلع ط ه = ب پس مربع ه ی مساوی شود با فلان

شرح

شرح - بطریق مذکور بتوان مربعی ترتیب داد معادل با مجموع هر چند مربع که خواسته باشیم زیرا که بعملی که دو مربع تحویل شود بیک سه مربع تحویل خواهد شد چه دو مربع را آمده یکی و همچنین اگر بخواهیم از مجموع چند مربع چند مربع دیگر موضوع کنیم

## مسئلهٔ دهم

میخواهیم مربعی ترتیب دهیم که نسبتش بمربع مفروض اب ده مثل خط م باشد بخط ن برخط غیر معین ه ط جزء ه ف را مساوی م



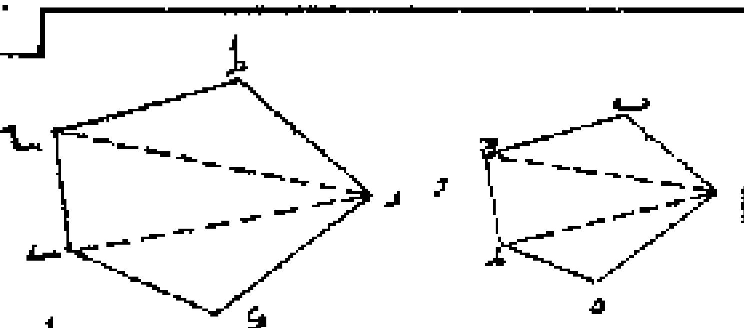
بگیرید و جزء ه ط را مساوی ن و برقطر ه ط نصف دائره رسم کنید و از نقطه ء عمود ء ی را برقطر اخراج کنید و از نقطه ی دو وتر ی ط ی ه را وصل کنید و امتداد دهید و از خط اول ی ک را مساوی ضلع اب مربع مفروض جدا کنید و از نقطه ک خط ک ل را بموازات ط ه رسم کنید پس ی ل ضلع مربع مطلوب است

برهان نظر بتوازی دو خط ک ل و ط ه این تناسب حاصل شود ی ل : ی ک = ی ه : ی ط و بعد از تربیع $\overline{\text{ی ل}}^2 : \overline{\text{ی ک}}^2 = \overline{\text{ی ه}}^2 : \overline{\text{ی ط}}^2$ ولی در مثلث قائم الزاویه ی ه ط

۱۱ مربع ی ه نسبت بمربع ی ط مثل قطعه ه ء است بقطعه ء ط یا مثل م است بن پس $\overline{\text{ی ل}}^2 : \overline{\text{ی ک}}^2 = \text{م} : \text{ن}$ ولی ی ک = اب پس مربع ی ل نسبت بمربع اب مثل م است بن

## مسئلهٔ یازدهم

میخواهیم بر ضلع ط بنظیر اب کثیر الاضلاعی مشابه باب ده ه رسم کنیم در کثیر الاضلاع مفروض دو قطر ا د و ا ه را وصل میکنیم و بر نقطه ط زاویه ی را مساوی ب ا د رسم میکنیم و بر نقطه ط زاویه ی ط ح را مساوی اب ح



دو خط ب ی و ط ی تقاطع شوند
بر نقطه ی و رطی مثلثی باشد
مشابه اب ج و هکذا بر ج ی
نظیر اج مثلث د ح ی را مشابه ا د ج رسم میکنیم و بر د ه نظیر اه مثلث د ک
را مشابه اده پس کثیر الاضلاع د ط ح ی ک شکل مطلوبست و مشابه اب ج د ه
زیرا که این دو شکل مرکب باشند از یک عده از مثلثات متشابهه و متشابه الوضع

## مسئله دوازدهم

دو شکل متشابه مفروض است میخواهیم شکلی دیگر رسم کنیم متشابه بهما که مساحتش
باشد با مجموع یا با تفاضل دو مساحتشان

فرض میکنیم سطح دو کثیر الاضلاع مفروض ل باشد و ك و دو ضلع متناظر آنها آ
و ب و سطح کثیر الاضلاع مطلوب م و ضلع نظیر با ا و ب از این کثیر الاضلاع ج
بر دو کثیر الاضلاع متشابه چون بر نسبت و مربع بر دو ضلع متناظر اند این تناسب حاصل شود

ل : ك = آ$^2$ : ب$^2$

و بعد از ترکیب ل : ل+ك = آ$^2$ : آ$^2$+ب$^2$

و نیز ل : م = آ$^2$ : ج$^2$

و چون م = ل + ك و دو تناسب اخیر در سه جمله مشارک باشند و بنابراین ج$^2$ =
آ$^2$ + ب$^2$ و از اینقرار ضلع ج وتر زاویه قائمه مثلثی شد که دو ضلع مجاور بزاویه قائمه
ا باشد و ب

و چون ضلع ج بدست آمد مسئله منجر میشود بمسئله سابقه
و اگر میخواستیم کثیر الاضلاع م معادل شود با ل - ك بطریق مذکور با زاویه و تنا

حاصل میشود   $ل : ک = ا^{۲} : ب^{۲}$

وبعد از تفصیل   $ل : ل - ک = ا^{۲} : ا^{۲} - ب^{۲}$

ونیز   $ل : م = ا^{۲} : ج^{۲}$

پس   $ج^{۲} = ا^{۲} - ب^{۲}$

## مسئلهٔ سیزدهم ۱۳

میخواهیم شکلی مشابه شکل مفروض دیگر رسم کنیم بروجهی که نسبتش بشکل مفروض مثل عدد س باشد بعدد ع

مساحت شکل مفروض را ل فرض میکنیم و یکی از اضلاعش را ا و مساحت شکل مطلوب را م و آن ضلعش را که نظیر ا باشد ج

پس بحکم مسئله   $م : ل = س : ع$

و نظر بتشابه دو شکل   $م : ل = ج^{۲} : ا^{۲}$

پس   $ج^{۲} : ا^{۲} = س : ع$

بنابراین باید ضلع ج را بدستور مسئله ۱۰ معلوم کرد

## مسئلهٔ چهاردهم ۱۴

میخواهیم شکلی مشابه با شکل ل رسم کنیم بوجهیکه مساحتش معادل باشد با شکل ک

یکی از اضلاع کثیر الاضلاع ل را ا فرض کنیم و ج را ضلع نظیرش از شکل مطلوب م پس نظر بتشابه دو شکل $ل : م = ا^{۲} : ج^{۲}$

وچون م باید بفرض معادل شود با ک این تناسب حاصل شود

$ل : ک = ا^{۲} : ج^{۲}$

پس اگر دو مربع طلب کنیم مثل سه۲ و ع۲ که معادل باشند با ل و ك این تناسب حاصل شود

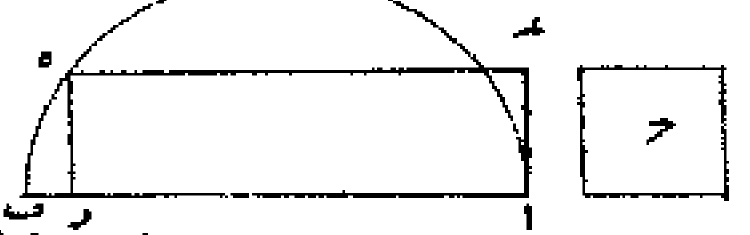
سه۲ : ع۲ = ا۲ : ح۲

پس سه : ع = ا : ح

بنابراین خط مطلوب ح جزء چهارم تناسب شد در سه خط سه و ع و ا

## مسئله پانزدهم

میخواهیم مسطحی رسم کنیم معادل با مربع مفروض ح بر وجهی که مجموع دو ضلع مجاور مسطح بطول خط اب باشد



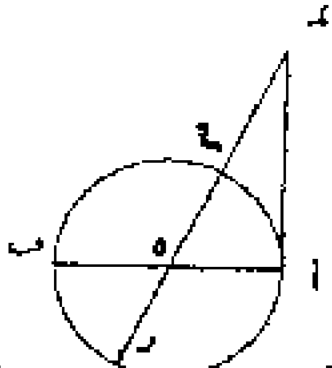

بر قطر اب نصف دایره رسم کنید و خط ده را موازی قطر رسم کنید چنانچه فاصله اد مساوی باشد با ضلع مربع مفروض ح و از نقطه ای که این خط دایره را قطع میکند عمود هز را بر قطر فرود آورید پس از و زب دو ضلع مسطح مطلوب باشند زیرا مجموعشان مساویست با اب و مسطحشان از × زب مساویست با مربع هز و هز یعنی با مربع اد پس این مسطح معادل باشد با مربع مفروض ح

شرح - شرط امکان مسئله اینست که فاصله اد از شعاع تجاوز نکند یعنی ضلع مربع ح اطول نباشد از نصف خط اب

## مسئله شانزدهم

میخواهیم مسطحی رسم کنیم معادل با مربع ح بر وجهی که تفاضل دو ضلع مجاور مسطح بطول اب باشد

بر قطر اب دایره رسم کنید و بر طرف قطر مماس اد را مساوی با ضلع مربع ح رسم کنید و بر نقطه د و مرکز ه قاطع ده را مرور دهید پس دج و دو دو ضلع مجاور مسطح مطلوب



برهان اولاً ضلع مربع و ضلع مساویست با قطر د ز

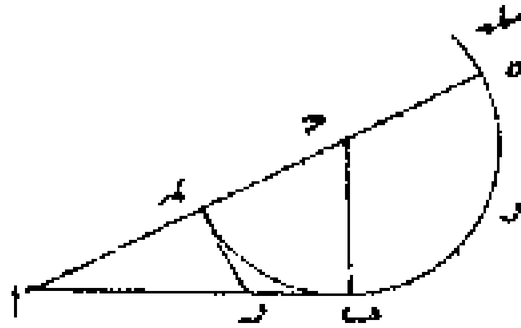
یا اب ثانیاً سطح ه ج × ه د مساویست با اه²

(۳۱ ق) پس این سطح معادل باشد با مربع مفروض

## مسئلهٔ هفدهم

میخواهیم خط اب را بر نسبت ذات وسط و طرفین قسمت کنیم یعنی بدو جزء چنانچه جزء اعظم واسطهٔ هندسی باشد ما بین تمام خط و جزء اصغر آن

فرض میکنیم د نقطهٔ تقسیم خط باشد پس بنابر فرض مسئله



اب : اد = اد : د ب

و بترکیب اب + اد : اب = اد + د ب : اد یا اب : اد

و بنابراین (اب + اد) × اد = اب²

از استقرار دو خط اب + اد و اد (خط اد مجهول مسئله است) تفاضلشان معین بطول اب و سطحشان مساویست با اب² پس طول آنها را میتوان بطریق سابقه معلوم کرد و آن بطریق ذیل است

بر طرف ب از خط اب عمود ب ج را باندازه نصف اب اخراج کنید و از مرکز ج و بشعاع ج ب دایره رسم کنید و خط ا ج ه را وصل نمائید پس دو خط مطلوب ا ه باشد و اط زیرا

تفاضلشان ط ه = اب و علاوه بر آن

اب² = اه × اط

اقصر این دو خط یعنی اط قطعه اد باشد پس باید از مرکز ا و بشعاع اط قوسی رسم نمود

تا نقطهٔ د بر اب نقل شود

شرح فرض میکنیم اب = ط و اد = اط = اج − ج ط

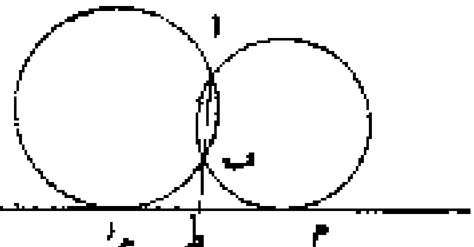
و اج = √(اب² + ب ج²) = √(ط² + ط²/۴) = √(۵ط²/۴) = ط/۲ √۵ و ج ط = ط/۲

پس

پس ار = $\frac{ط}{۲}\sqrt{۵} - \frac{ط}{۲} = \frac{ط}{۲} \times (\sqrt{۵} - ۱)$

## مسئله هیجدهم ۱۸

میخواهیم دایره رسم کنیم که مرور کند بر دو نقطه ا و ب و مماس شود با خط مفروض م م

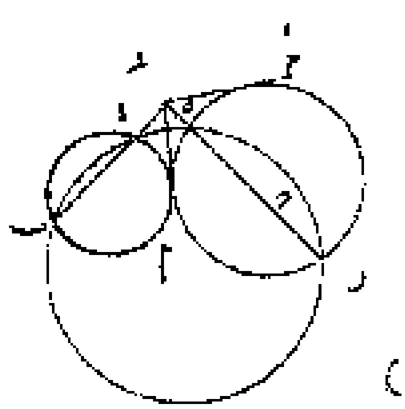


فرض میکنیم مسئله حل شده و ا ب م دایره مطلوب باشد پس ا ب را امتداد دهیم تا نقطه ط و از سابق میدانیم که مماس ط م واسطه هندسی است مابین ط ا و ط ب

پس وضع نقطه م بانیقسم بدست آید که واسطه هندسی مابین ط ا و ط ب معلوم کنیم و از ابتدا از نقطه ط بر خط مفروض نقل کنیم و چون نقطه م مشخص شد مرکز دایره بسهولت معلوم شود فاصله ط م را در دو جهة میتوان نقل نمود بنابراین مسئله بطور کلی صاحب دو جواب باشد

## مسئله نوزدهم

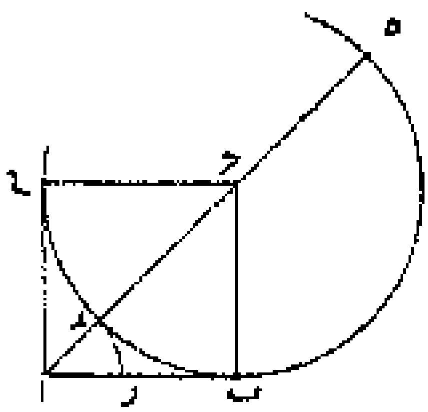
میخواهیم بر دو نقطه ا و ب دایره مرور دهیم که تماس کند دایره مفروضه یکی ح م را



فرض میکنیم مسئله حل شده و ا م ب دایره معلوم باشد و مماس مشترک م ء را رسم میکنیم و امتداد میدهیم تا قاطع ا ب را بر ء قطع کند و از ء قاطع ء د ه را در دایره ح رسم میکنیم (ماتبقی)

## مسئله بیستم

میخواهیم مقیاس مشترکی در صورت امکان مابین قطر و ضلع مربع مشخص کنیم شکل ا ب ح ء مربع مفروض است و ا ح قطر شکل اول ء ب را چند مرتبه ممکن باشد




برا و نقل میکنیم ولهذا از مرکز ح و بشعاع ح ب
نصف دایره ه د ب ه را رسم میکنیم و معلوم میشود
که ح ب یکمرتبه در ح ا بگنجد و باقیش ا د باشد
پس نتیجهٔ عمل اول این شد خارج قسمت ۱ و باقی ا د
و حال باید آنرا بسنجید ب ح یا بمساویش ا ب

پس میتوان ا د را مساوی ا ز جدا نمود از ا ب نقل کرد و معلوم کرد که دو مرتبه در ا ب بگنجد و باقیش چیزی باشد ولی چون این باقی یا مقدار جاروی بسیار ناقص است و طول خطی که نظر بصری که پیدا میکنند از دست برون دوا من براه واسطهٔ ز و د ناقص شد و در تعیین مطلوب باز از روی نتوان حکم صریح کرد در اینکه آیا دو خط ا ح و ح ب را مقیاس مشترک هست یا نه و وسیلهٔ آسانی در دست هست که عمل را بخطوط متناقصه نکشانند و همواره در خطوطی باشد که طولشان بر قرار باقیست و تفصیلش اینست

چون زاویهٔ ا ب ح قائمه است ا ب مماس دایره شود و ا ه قاطعی باشد که از همان نقطه دایره رسم شده پس ا د : ا ب = ا ب : ا ه و از استقرار در عمل ثانی که مقصود مقایسهٔ ا د و ا ب است میتوان عوض نسبت ا د : ا ب نسبت ا ب : ا ه را اختیار نمود و ا ب یا مساویش ح ه دو مرتبه در ا ه بگنجد و باقیش ا د باشد پس نتیجهٔ عمل ثانی خارج قسمت ۲ است و باقی ا د که باید به ا ب بسنجید

عمل ثالث چون منجر شد بمقایسهٔ ا د و ا ب پس بنابر آنچه ذکر شد باز مبدل شود بمقایسهٔ ا ب یا مساویش ح ه نسبت به ا ه و از استقرار خارج قسمت ۲ باشد و باقی ا د

پس معلوم شد که این عمل را حد و انتهائی نباشد و از استقرار مقیاس مشترکی مابین قطر و ضلع مربع بدست نیاید و مطلب در علم حساب مبین شده بود چونکه این دو خط بر نسبت ۱ : $\sqrt{2}$ باشند

بواحد یعنی اصم است ولی بدلیل هندسی واضح‌تر و روشن‌تر گردید

شرح - پس میان قطر مربع و ضلعش نه مقیاس خطی بدست آمد و نه نسبت عددی تحقیقی حاصل گشت ولی تا هر عدد و مقام که خواهیم میتوان بوساطت کسر مسلسل که مساوی آن نسبت است مطلوب بتقریب جست بعمل اول خارج قسمت ۱ شد و بعمل دوم و سایر اعمال الی نهایت خارج قسمت‌ها همه ۲ شدند و بنابراین کسر مسلسل مطلوب اینست

$$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\dots}}}}}$$

الی غیرنهایت

مثلاً اگر تا جملهٔ چهارم در وی توقف کنیم مقدار نسبت این میشود $\frac{12}{29}$ ۱ یا $\frac{41}{29}$ یعنی که نسبت تقریبی قطر مربع بضلعش = ۴۱ : ۲۹ و چون عدد جمله‌ها را بیشتر اختیار کنیم به تحقیق نزدیکتر شویم

تنبیه - کسر مسلسل که اینجا ذکرش در میان آمد تفصیلش را در علم جبر و مقابله بیان کرده‌ایم ولی بمناسبت بحث که مختصری درخصوص استخراج کسر مذکور اشاره کنیم

مسئله - میخواهیم بکسر مسلسل تحویل کنیم مقدار اصم را $\sqrt{\text{ح}^2+1}$ و ح عدد یست صحیح بزرگتر عدد صحیحی که در $\sqrt{\text{ح}^2+1}$ مندرج باشد ح است پس این تساوی را فرض کنیم

$\sqrt{\text{ح}^2+1} = \text{ح} + \frac{1}{\text{م}}$ و از آن این تساوی استخراج شود $\text{م} = \frac{1}{\sqrt{\text{ح}^2+1}-\text{ح}}$

و حال برای استخراج عدد صحیحی که در م مندرج باشد صورت و مخرج کسر را در این جمله $\text{ح}+\sqrt{\text{ح}^2+1}$ ضرب بکنیم تا باینصورت مختصر درآید

$$\text{م} = \text{ح} + \sqrt{\text{ح}^2+1}$$

پس ظاهر شد که جزو صحیح م اینجا شد ۲ح و آنوقت فرض کنیم

$\text{م} = \text{ح} + \text{ح}$

$$\text{م}' = \text{ح} + \sqrt{\text{ح}^2+1} = 2\text{ح} + \frac{1}{\text{م}''} \quad \text{و بعد} \quad \text{م}'' = \frac{1}{\sqrt{\text{ح}^2+1}-\text{ح}}$$

و این مقدار $\text{م}'''$ بعینه همانست که برای $\text{م}'$ سابق بدست آمده بود پس معلوم میشود که مقدار $\sqrt{\text{ح}^2+1}$ این کسر مسلسل شود

$$\sqrt{\text{ح}^2+1} = \text{ح} + \cfrac{1}{2\text{ح} + \cfrac{1}{2\text{ح} + \cfrac{1}{2\text{ح} + \cfrac{1}{2\text{ح}}}}}$$

الی غیر نهایه

و من باب مثال فرض میکنیم $\sqrt{2}$ را و آن باین صورت نوشته شود $\sqrt{1+1} = \sqrt{1^2+1} =$ و از این قرار $\text{ح} = 1$ پس باین کسر مسلسل تحویل شود

$$\sqrt{2} = \sqrt{1^2+1} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}}$$

الی غیر نهایه

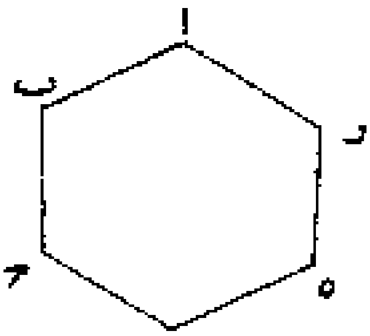
# در خواص اشکال ذو کثیرة الاضلاع منتظمه و مساحت دایره

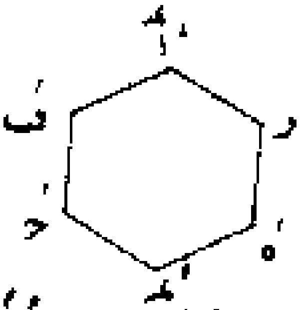
## حدود

هر کثیر الاضلاعی که متساوی الزوایا باشد و هم متساوی الاضلاع آن را کثیر الاضلاع منتظمه گویند کثیر الاضلاع منتظم انواع دارد و اضلاعش بی شمار میرسد مثلث متساوی الاضلاع منتظم است که دارای سه ضلع باشد و مربع آنکه دارای چهار

## قضیه اول

هر دو کثیر الاضلاع منتظم که دارای یک عدد اضلاع باشند متشابه اند





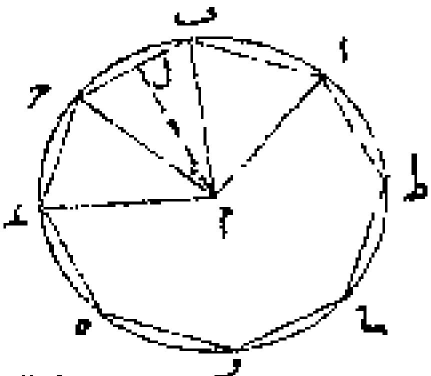
دو مسدس اختیار میکنیم مثل اب ج د ه و و اَ بَ جَ دَ هَ وَ مجموع زوایا در هر دو یکی است که مقدارش هشت قائمه است (۱۳۱) و زاویه ا مسدس $\frac{1}{6}$ مجموع باشد و همچنین زاویه اَ پس ا = اَ و همچنین دو زاویه متساوی باشند و همچنین دو زاویه ب و بَ و ج و جَ و علاوه بر آن نظر بتعریف این نوع اشکال اضلاع اب ب ج و ج د و غیره متساوی باشند و همچنین اضلاع اَ بَ بَ جَ و جَ دَ و غیره پس این نسبت حاصل شود اب : اَ بَ = ب ج : بَ جَ = ج د : جَ دَ و غیره پس دو شکل مذکور زوایاشان متساوی شد و اضلاعشان متناسب و بنا بر این متشابه باشند

نتیجه هر دو کثیر الاضلاع منتظم که یک عدد اضلاع باشند دو محیطشان بنسبت دو ضلع متشابه باشد و سطحشان بنسبت دو مربع اند و ضلع

شرح — زاویه کثیر الاضلاع منتظم از روی عدد اضلاعش بدست آید مثل زاویه کثیر الاضلاع متساوی الزوایا

## قضیه دوم

کثیر الاضلاع منتظم را میتوان در دایره محاط نمود و نیز بر دایره محیط کرد



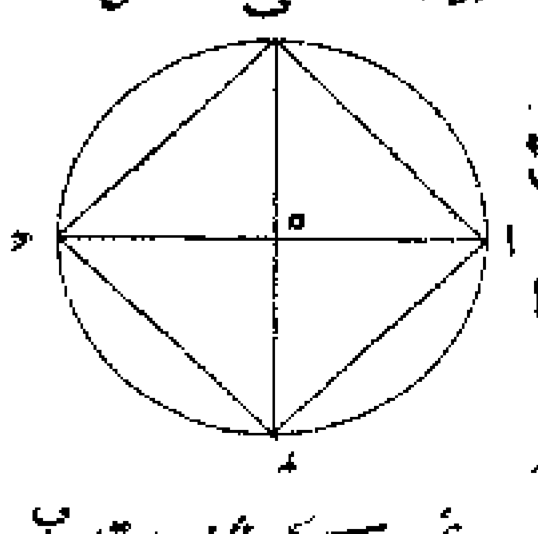
اب ح ده.... کثیر الاضلاع مفروض باشد دایره
بر سه نقطه ا و ب و ح مرور دهیم و مرکزش نقطه م باشد
و م ل عمود وارد بر وسط ضلع ب ح و دو خط ا م
و م ه را وصل کنیم حال گوئیم دو ذو اربعه اضلاع
م ل ح ه و م ل ب ا را میتوان بر همدیگر منطبق نمود زیرا که ضلع م ل در هر دو مشترک است
و زاویه م ل ح = م ل ب چونکه هر دو قائمه اند پس ضلع ل ح منطبق شود بمساوی خود
ل ب و نقطه ح بر ب و نظر بتعریف کثیر الاضلاع زاویه ل ح ه = ل ب ا پس ح ه
واقع شود بر استقامت ب ا و چون ح ه = ب ا نقطه ه واقع شود بر ا و دو ذو اربعه
اضلاع بر همدیگر منطبق شوند پس فاصله م ه مساوی باشد با م ا و بنا براین دایره
ماره بر سه نقطه ا و ب و ح بر نقطه ه نیز گذرد و بهمین دلیل ثابت میکنیم که دایره که
بر سه نقطه ب و ح و ه مرور کند بر راس بعد ه و هکذا در ما بقی پس دایره که بر سه نقطه ا و ب
و ح گذشته مرکزش م است بر سایر رؤس کثیر الاضلاع و بنا براین آن شکل محاط شود در دایره
ثانیاً نسبت باین دایره جمیع اضلاع اب و ب ح و ح ه وغیره اوتار متساوی اند پس متساوی
البعد باشند از مرکز دایره پس اگر از مرکز م و بشعاع م ل دایره رسم کنیم این دایره تماس کند
ضلع ب ح و سایر اضلاع کثیر الاضلاع را و هر کدام را در نقطه وسط و دایره محاط شود
در کثیر الاضلاع تا آنکه کثیر الاضلاع محیط شود بر دایره
شرح اول — نقطه م مرکز مشترک دایره محیطیه و دایره محاطیه را میتوان مرکز کثیر الاضلاع
گفت و باین لحاظ زاویه ا م ب حادثه ما بین دو شعاعی که بطرفین ضلع اب وصل شوند زاویه
مرکزیه گوئیم و چون جمیع اوتار اب و ب ح وغیره متساوی اند ظاهر است که جمیع زوایا

مرکزیه نیز متساوی‌اند و بنابراین عاده هرکدام با نود درجه حاصل شود که چهار قائمه را قسمت کنیم

بر عدد اضلاع کثیر الاضلاع

شرح ۲ - چون خواهیم در دایره مفروضه کثیر الاضلاع منتظمی صاحب چند ضلع یا ... محاط کنیم هیچ عمل لازم نیست جز آنکه محیط را بعدد اضلاع کثیر الاضلاع بر اجزای متساوی قسمت کنیم زیرا که چون قسی متساوی شدند اوتار اب و ب ج و ج د و غیره متساوی گردند (شکل ۴) و مثلثات ا ب م و ب م ج و ج م د و غیره نیز متساوی شوند چونکه متساوی الاضلاع‌اند نسبت بیکدیگر پس جمیع زوایای ا ب ج و ب ج د و ج د ه و غیره متساوی گردند و شکل ا ب ج د .... کثیر الاضلاع منتظم باشد

شرح ۳ - چون در قوس دایره اوتار متساویه محاط کنیم شکلی را که صورت می‌بندد قطعه کثیر الاضلاع منتظم گوئیم چنین قطعه دارا باشد خواص اصلیه اشکال کثیر الاضلاع منتظمه چونکه زوایایش متساویه‌اند و هم محاط شود در دایره و هم محیط شود بر آن ولی هیچ کثیر الاضلاع منتظم مخصوصی متعلق نباشد جز آنوقت که قوس موتر یکی از اضلاعش حصه صحیحی باشد از تمام محیط



## قضیه ۳ مسئله

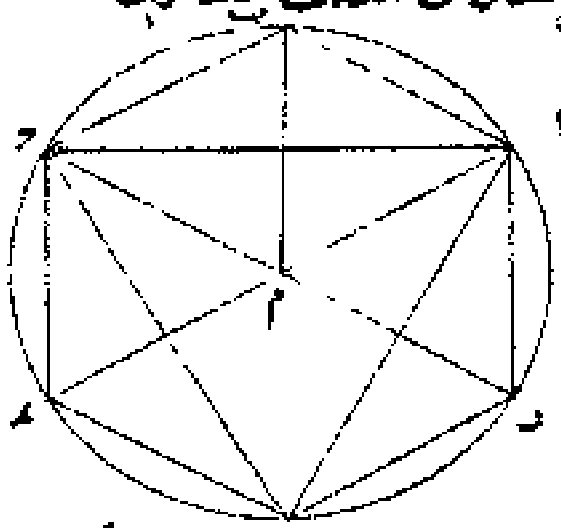
میخواهیم در دایره مفروضه مربعی محاط کنیم دو قطر ا ج و ب د را بر هم عمود کنید و اطراف ا و ب و ج و د را بخطوط وصل کنید و شکل ا ب ج د مربع محاطی باشد چونکه زوایای ا ه ب و ب ه ج و غیره متساوی باشند و اوتار ا ب و ب ج و غیره نیز متساوی

شرح مثلث ب ه ج چون قائم الزاویه است و متساوی الساقین ایضاً نسبت حاصل شود

ب ج : ب ه = $\sqrt{2}$ : ۱ پس ضلع مربع محاطی نسبت بشعاع مثل جذر ۲ است بواحد

## قضیهٔ ۱۲ مسئله

میخواهیم در دایرهٔ مفروضه شکل مسدس و مثلث متساوی الاضلاع محاط کنیم



فرض میکنیم مسئله حل شده و اب ضلع مسدس محاطی باشد و دو شعاع ام و مب را وصل میکنیم و میگوئیم مثلث ام ب متساوی الاضلاع است یعنی زاویه ام ب سدس چهار قائمه است

و چون قائمه را واحد فرض کنیم ام ب = $\frac{4}{6}$ = $\frac{2}{3}$ و مجموع دو زاویه دیگر ا م و ب ام همان مثلث این میشود ۲ − $\frac{2}{3}$ = $\frac{4}{3}$ و چون دو زاویه برابرند مقدار هر کدام $\frac{2}{3}$ باشد پس مثلث ابم متساوی الاضلاع باشد و ضلع مسدس محاطی مساوی شود با شعاع دایره

و بنا براین چون خواهیم در دایره مسدسی محاط کنیم باید شعاع شش را شش مرتبه بر محیط نقل شود و لابد نقطهٔ منتهی بر مبدا واقع شود

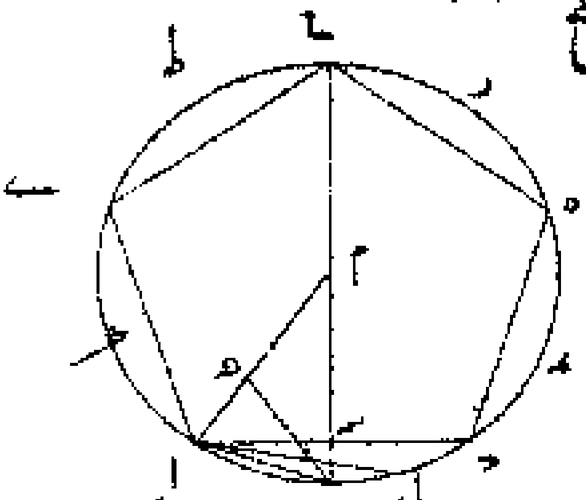
و چون مسدس ابجدهو محاط شد در رؤس زوایایش را یکی در میان وصل کنیم مثلث متساوی الاضلاع اجه بدست آید

شرح - شکل ابجم معین است یعنی اضلاعش هم متوازی باشد و هم متساوی چونکه اب = بج = جم = ام پس ق ۵ از ۱۳ مجموع دو مربع دو قطر اج$^2$ + بم$^2$ مساوی باشد با مجموع مربعات اضلاع که ۴ . اب$^2$ باشد یا ۴ بم$^2$ و چون از طرفین بم$^2$ را موضوع کنیم باقی اج$^2$ = ۳ . بم$^2$ پس ضلع مثلث متساوی الاضلاع

نسبت بشعاع مثل جذر ۳ است بواحد

## قضیه ۵ مسئله

میخواهیم در دایره مفروضه شکل معشری محاط کنیم



فرض میکنیم مسئله راحل شده و اب ضلع معشر محاطی باشد و زاویه مرکزی ام ب ا = ۴/۱۰ یا ۲/۵ پس مجموع دو زاویه م ب ا و م ا ب مساویست با ۲ − ۲/۵ = ۸/۵ و بنابراین مقدار هر کدام ۴/۵ باشد

حال بخط ب ن زاویه م ب ا را نصف میکنیم ومثلث ن م ب متساوی الساقین شود چونکه دو زاویه ن م ب و ن ب م هر کدام ۲/۵ قائمه باشد و م ن = ن ب ومثلث ب ا ن نیز متساوی الساقین است زیرا زاویه ن ب ا چون ۲/۵ قائمه است و زاویه ب ا ن مساوی است با ۴/۵ زاویه سیم ا ن ب لابد ۴/۵ میشود

بنابراین   اب = ب ن = ن م

وبالاخره   ب م : ب ا = ن م : ا ن

یا   ا م : م ن = م ن : ا ن

پس معلوم شد که شعاع ا م بر نقطه ن بر نسبت ذات وسط و طرفین قسمت شده و جزء اعظم م ن ضلع معشر محاطی است

تبصره ضلع معشر محاط در دایره که شعاعش ن فرض شود نسبت و ۱/۲

ن (√۵ − ۱)/۲

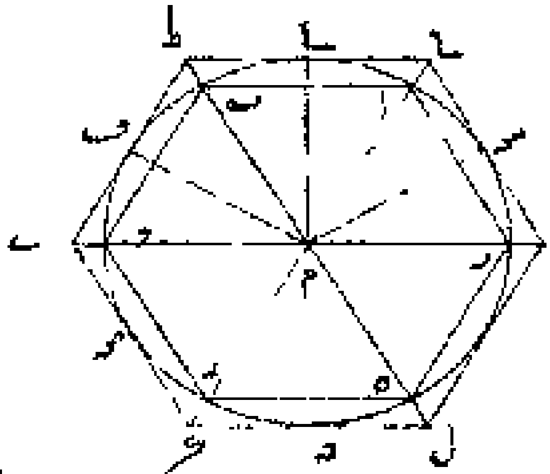
تبصره ۲ ل - چون رئوس معشر را یک در میان وصل کنیم مخمس ا ح ه ـ بدست آید

نتیجه ۳ - خط اب ضلع معشر است و ال ضلع مسدس و طول قوس ب ل نسبت بمحیط ایست $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} = \frac{1}{15}$ پس وتر ب ل ضلع کثیر الاضلاع ۱۵ ضلعی باشد وضمناً معلوم است که وتر ح ل ثلث ح ب است

شرح - چون کثیر الاضلاع منتظمی در دایره محاط باشد قوسی موتر باضلاع شرا نصف کنیم و اوتار انصاف قوسی را وصل کنیم کثیر الاضلاع منتظم جدیدی ترکیب میشود که عدد اضلاع آن مضاعف اولی باشد و از اینقرار بوساطت مربع میتوان کثیر الاضلاع ۸ ضلعی و ۱۶ و ۳۲ و .... محاط نمود و همچنین از روی مسدس کثیر الاضلاع ۱۲ ضلعی و ۲۴ و ۴۸ .... محاط کرد و از روی معشر کثیر الاضلاع ۲۰ ضلعی و ۴۰ و ۸۰ و .... محاط نمود و از روی ۱۵ ضلعی کثیر الاضلاع ۳۰ و ۶۰ ....

تنبیه - مدتی مهندسین این عقیده را بودند که اشکال کثیر الاضلاع منتظمه که بتوان از روی اصول هندسه و بعبارت اخری از روی حل معادلات درجه اول و دوم در دایره محاط کرد منحصر باشد بآنها که مذکور شد ولی یکی از مهندسین معروف گُس سال ۱۲۱۶ در رساله مبرهن نمود که میتوان با مثال قواعد سابقه در دایره محاط نمود کثیر الاضلاعی که صاحب ۱۷ ضلع و بطور کلی انچه دارای $2^n+1$ ضلع باشد مشروط بر آنکه $2^n+1$ فرد اول باشد

## قضیه ۶ - مسئله



کثیر الاضلاع منتظم اب ح د .... در دایره محاط شده میخواهیم کثیر الاضلاعی مشابهش محیط کنیم بر نقطه ع وسط قوس اب خط ح ط را مماس رسم کنیم و آن موازی باشد با اب و ه ا ل و مانند آن از برای وسط سایر قوس ب ح و ح د وغیره رسم کنیم انخطوط مماس

متقاطع شوند و کثیر الاضلاع منتظم محیطی ـ ط ـ لـ ... ترکیب شود و مشابه کثیر الاضلاع محاطی

**برهان** این قضیه آسان معلوم شود که سه نقطه م و ب و ط بر استقامت خطی واقع اند زیرا که دو مثلث قائم الزاویه م ع ط و م ط ف مشارکند در وتر م ط و ضلع م ع = م ف پس متساوی باشند (۱۹ اول) و زاویه ع م ط = ط م ف بنا براین خط م ط مرور کند به نقطه ب از وسط قوس ع ف و بهمین وجه ظاهر میشود که نقطه ـ واقع است بر استقامت م د و هکذا و چون ـ ط موازیست با اب و ط ـ با ب ج زاویه ـ ط ـ = اب ج و همچنین زاویه ط ـ لـ = ب ج د و هکذا پس زوایای کثیر الاضلاع محیطی متساوی باشند با زوایای محاطی و علاوه بر آن نظر بتوازی همین خطوط ـ ط : اب = م ط : م ب و ط ـ : ب ج = م ط : م ب پس ـ ط : اب = ط ـ : ب ج ولی اب = ب ج پس ـ ط = ط ـ و بهمین دلیل ط ـ = ـ لـ و هکذا پس اضلاع کثیر الاضلاع محیطی متساوی باشند پس این کثیر الاضلاع منتظم باشد و مشابه کثیر الاضلاع محاطی

نتیجه ۱ ـ بعکس هرگاه کثیر الاضلاع محیطی ـ ط ـ لـ ... مفروض باشد و بخواهیم از آن روی کثیر الاضلاع محاطی اب ج ... را رسم کنیم بهمین عمل کافیست که برؤس ـ و ط ـ و غیره کثیر الاضلاع مفروض خطوط م ـ و م ط و ... را رسم کنیم و آنها محیط دائره را بر نقاط ا و ب و ج و غیره قطع کنند و مابین آنها را با وتار اب و ب ج و غیره وصل کنیم تا از ترکیب آنها کثیر الاضلاع محاطی بدست آید و در همین حالت نیز میتوان مختصراً بین نقاط تماس ع و ف و ... را با وتار ع ف و ف ... و غیره وصل نمود تا باز کثیر الاضلاع منتظم مشابه محاطی بدست آید

نتیجه ۲ ـ پس میتوان بر دائره مفروضه محیط نمود جمیع اشکال منتظم را که بتوانیم محاط کنیم در آن دائره بعکس

## قضیهٔ هفتم

مساحت