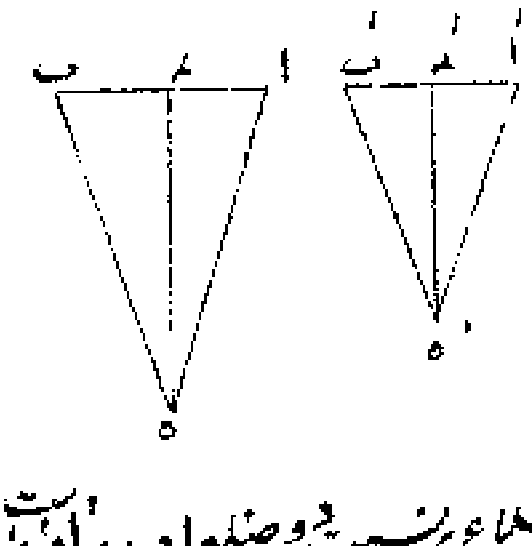
مساحت کثیر الاضلاع منتظم مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف شعاع دایرهٔ محاطیه

برهان در شکل سابق کثیر الاضلاع مفروض ح ط ک ... است و مساحت مثلث ح م ط = ح ط × ½ م ع و مساحت مثلث ط م ک = ط ک × ½ م ف و لی م ف = م ع پس مساحت مجموع دو مثلث = (ح ط + ط ک) × ½ م ع و چون همین وجه در سایر مثلثات پیش ویم معلوم میشود که مساحت مجموع آنها یعنی مساحت کثیر الاضلاع تمام = مجموع قواعد ح ط + ط ک + ... که محیط شکل باشد ضرب در ½ م ع که نصف شعاع دایره محاطیه باشد

شرح - شعاع دایره محاطیه یعنی م ع بعینه عمودیست که از مرکز بر یکی از اضلاعش اخراج شود و آنرا گاه ارتفاع کثیر الاضلاع نیز گویند

قضیه هشتم

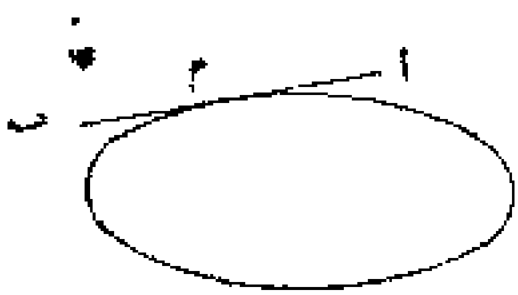
دو کثیر الاضلاع منتظم که عدد اضلاعشان برابر باشد محیطشان بر نسبت دو شعاع دو دایره محیطه است و نیز بر نسبت دو شعاع دو دایره محاطیه و سطوحشان بر نسبت مربعات همان شعه است،



برهان اب ضلع یکی از دو کثیر الاضلاع است و ه مرکزش و ه ا شعاع دایره محیطه اش و ه د عمود بر اب شعاع دایره محاطیه و همچنین اَبَ ضلع کثیر الاضلاع دیگر که متشابه اوست و هَ مرکزش و هَ اَ شعاع دایره محیطه اش و هَ دَ شعاع دایره محاطیه اش محیط دو کثیر الاضلاع بر نسبت دو ضلع اب و اَبَ است

و دو زاویه او أ چون هر کدام نصف زاویه کثیر الاضلاع است متساوی باشند و همچنین دو زاویه ب و بَ پس دو مثلث ا ب ه و اَ بَ هَ متشابه باشند و همچنین دو مثلث قائم الزاویه ا د ه و اَ دَ هَ پس اب : اَبَ = اه : اَهَ = ده : دَهَ پس محیط دو کثیر الاضلاع متناسب باشند بنسبت دو شعاع اه و اَهَ از دو دایره محیطه و نیز بنسبت دو شعاع ده و دَهَ از دو دایره محاطه

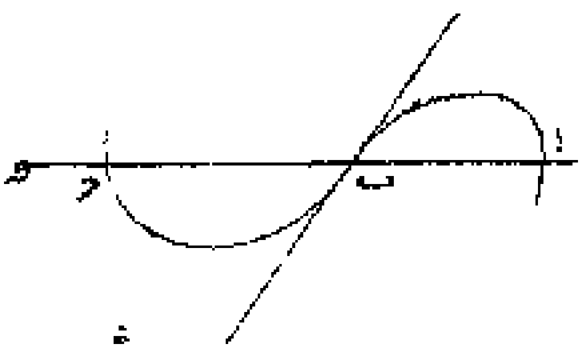
و چون سطح دو کثیر الاضلاع بنسبت مربع دو ضلع متناظر اب و اَبَ اند پس متناسب باشند بنسبت مربع دو شعاع اه و اَهَ از دو دایره محیطه و بنسبت مربع دو شعاع ده و دَهَ از دو دایره محاطه



در مساحت دایره

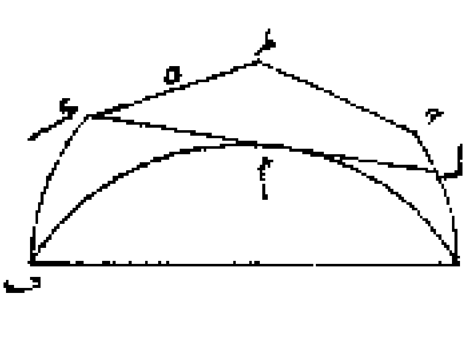
تعریف

خط منحنی محدب آنست که چون بهر نقطه اش خطی مماس کشند تمام منحنی در یک سمت آن خط افتد



خط منحنی محدب را چون خطی قطع کند فصل مشترک از دو نقطه بیشتر نباشد پس اگر خط م ن منحنی را بر سه نقطه ا و ب و ج قطع کند ظاهر است که چون مماسی بر یکی از نقاط مابین مثل ب رسم کنیم قدری از منحنی بیک سمتش افتد و قدری بسمت دیگر

و محیط دایره خط منحنی است محدب



قضیۀ نخست

خط محدب ا م ب اقصر است از هر خطی که بر آن احاطه نموده باشد و بطرفینش منتهی شده باشد بنقطه ا و ب

برهان. اگر گویند ام ب نیست اقصر از جمیع خطوط محیطه‌اش پس میان این خطوط باید خطی پیدا شود اقصر از باقی که کوچکتر باشد از ام ب یا منتهایش برابر با آن باشد

چنین خط را ا حـ د ه ب فرض میکنیم و بر نقطه از خط ام ب که غیر مشترک باشد در دو خط مثل م مماس ل م لـ را رسم میکنیم این خط مندرج شود ما بین دو خط ام ب و حـ د ه ب چونکه اولی محدب است و خط ل ك اقصر است از ل حـ د ه لـ پس چون بجای قطعه ل حـ د ه لـ خط مستقیم ل لـ را قرار دهید خط محیطی ا ل لـ ب اقصر میشود از ا حـ لـ ب و حال آنکه بفرض ما خط اخیر اقصر بود از باقی پس فرض باطل است و جمیع خطوط محیطیه اطول اند از خط ام ب

و بهمین جهة ثابت کنیم که خط محدب مسدود ام ب اقصر است از هر خطی که از اطراف بر آن حاطه نموده باشد

قبل از ذکر اصول مبحث حدود که در مساحت اشکال منحنیه بکار آیند شرح معانی بعضی اصطلاحات مستعمله بیفایده نیست

مقدار تغییر پذیر آنست که حالات و اوضاع مختلفه کمیت متدرجا بآن تعلق گیرد

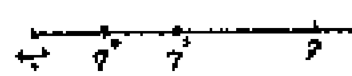
حد عبارت از مقداریست ثابت که مقدار تغییر پذیر تا هر مقام متوالیا بآن نزدیک شود ولی متوالیا بآن نرسد

در علم حساب هندسه امثله عدیده هست از مقادیر تغییر پذیر و از حدود دیگر نسبتشان بمقادیر مسیل میکنند

مثلا میدانیم که مقدار زاویه یکی از اضلاع مظهر که صاحب ع ضلع باشد نسبت $\frac{۲ع - ۴ق}{ع} = ۲ق - \frac{۴ق}{ع}$

و چون فرض کنیم عدد اضلاع متدرجا ترقی کند تا مالا نهایه معلوم است که مقدار زاویه ...

ترقی کند و آنوقت کهٔ را بی اندازه بزرگ فرض کنیم کسر ۱/ع کوچکتر شود از هر مقدار مفروض
و معلوم شود که مقادیر متغیر لیهٔ زاویه کثیر الاضلاع منتظم حد تش دو قائمه است
و همچنین اگر اب را بر ح نصف کنیم و حب را بر حَ و هکذا



آنوقت می بینیم که خطوط اح و احَ و احً ...... حد مقادیرشان اب است
و از اینگونه امثال بیشمار میتوان آورد
ولی باید این فقره را نیز دانست که ممکن است مقداری تغییر کند و حدی نداشته باشد
مثلا مجموع ع جمله اول تناسب هندسی با فزایش مقدار ع متزاید و مجموع را حدی نباشد
جز در این صورت که تناسب متناقص باشد ولی اگر متزاید باشد حد مجموع الی غیر نهایت

قضیهٔ هم ۱۵

هرگاه دو مقدار تغییر پذیر ح و ح در ضمن تغییر و تقرب بحدشان پیوسته
متساوی باشند حدشان ح و حَ نیز متساوی اند
برهان فرض میکنیم دو تغییر پذیر ح و ح در تحت حد خود ح و د باشند و تجاوز نکنند و این دو
را قرار میدهیم ح = ج + ب   حَ = د + ه
(ب و ه ممکن است کوچکتر از هر مقدار معروض شوند)
و چون تساوی ح و حَ را از اول تعریف کنیم این تساوی حاصل میشود ح - حَ = ج - د + ب
- ه = ب - ه (چونکه بنا بر فرض ح = حَ)
حال اگر ما بین ح و حَ تفاضلی مثل ل فرض کنیم این تساوی حاصل شود ل = ب - ه
و این محال است چونکه ب و ه و بنا بر این تفاضلشان از هر مقدار مفروضی کوچکتر شوند
و اگر دو تغییر پذیر در تقرب بحد خود متناقص میشدند نه متزاید دلیل مانند مذکور بود

قضیهٔ یازدهم

هرگاه دو متساوی ح و د حاصل ضرب بسمت حد خود ط و ی میل کنند
خود حاصل ضرب ح × د حدش ط × ی باشد

برهان این دو متساوی را قرار میدهیم ط = ح + ب و ی = د + ه
و آنها را در هم ضرب میکنیم چنین میشود

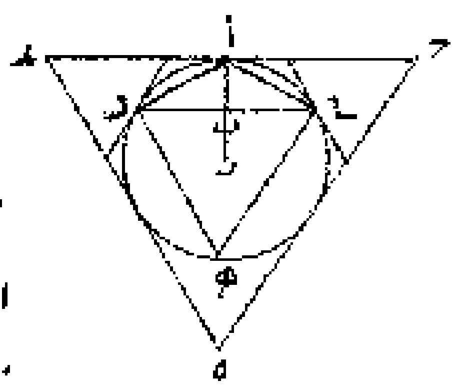
ط × ی = ح د + د ب + ح ه + ب ه

و چون هر قدر ح و د بسمت حد خود میل کنند دو مقدار ب و ه بینهایت تنزل میکنند
سه جمله د ب و ح ه و ب ه بی اندازه کوچک شوند پس مجموعشان نیز هر چند میخواهیم کوچک
تواند شد پس مقدار ح د هر چند بخواهیم تواند نزدیک شد به ط ی

و چون حکم در حاصل ضرب دو عامل مبرهن شد بلا زحمت میتوان آنرا در چند عامل جاری ساخت
نتیجه که حد خارج قسمت دو متغیر ح و د مساوی است با خارج قسمت دو حدشان

قضیهٔ دوازدهم

اولا محیط دایره حد مشترک است که بسمتش میل میکنند دو محیط دو کثیرالاضلاع
منتظم متشابه محاطی و محیطی که عدد اضلاعشان بتضاعیف ترقی کند
ثانیا مساحت دایره حدیست که بسمتش میل میکنند سطوح همان اشکال



اولا فرض میکنیم ط د ه کثیرالاضلاع منتظم محاطی
و ح ب ه کثیرالاضلاع منتظم محیطی و طول محیط دایره
مندرج است مابین دو محیط این دو کثیرالاضلاع و عدد
اضلاعشان را متصل مضاعف کنیم از روی خود شکل
ظاهر میشود که محیط کثیرالاضلاع محاطی روی تزاید نهد

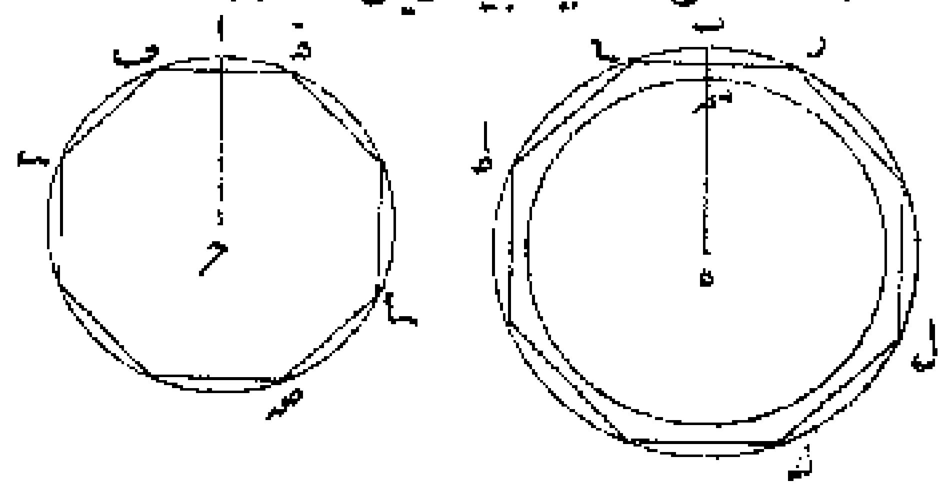
و محیط کثیرالاضلاع محیطی رو به پستی نقص گذارد
پس این دو محیط همواره باید نزدیکتر شوند هر چه عدد اضلاع بیشتر مضاعف
شود و اگر بیان ثابت کنیم که تفاضل مابین آنها ممکن است از هر مقدار مفروض
کوچکتر شود مبرهن میشود که آن دو محیط هر چند بخواهیم بدایره توانند نزدیک شد
فرض میکنیم م و مَ محیط دو کثیرالاضلاع ح ه و ی ح هر باشند پس
م : مَ = ر ا : ر ب و بتفصیل نسبت م − مَ : م = ر ا − ر ب یا ب ا : ر ا
و بنا بر این م − مَ = (م × ب ا) / ر ا
و چون ب ا اقصر است از ا د و ا د اقصر است از نصف موترش و موترها
موتر بی اندازه کوچک شود از آنجه که در سلسله شاب بر نسبت ا و ½ ر ... و ...
... و ..... شرکت کنند وتر نیز رو به تنزل است و را مقدارش ثابت است پس بحرکت
استقا در ... مساوی ... چنین نتیجه میشود که م − مَ بی اندازه بسمت صفر نزدیک شود
ثانیاً فرض میکنیم سه و س مساحت هما دو کثیرالاضلاع باشد و مانند مذکور
ثابت میکنیم که چون عدد اضلاع آنها روی ترقی نهد سه و س بی اندازه بسطح دایره
نزدیک شوند و مبرهن شود که حد آن دو سطح دایره است همین قدر که بنمائیم سه − س
ممکن است از هر مقدار مفروض کوچکتر شود پس گوئیم بنا بر ۸
سه : س = ر ا² : ر ب² و بتفصیل نسبت سه − س : سه = ر ا² − ر ب² یا
ب د² : ر ا² و بنا بر این سه − س = (سه × ب د²) / ر ا²
و ظاهر است که این تفاضل بی اندازه مائل است بسمت صفر زیرا که چون عدد اضلاع
مضاعف شود سه رو بتناقص نهد و ب د که اقصر است از ا د ممکن است بی
اندازه کوچک شود و ... ثابت است فهو المطلوب

مقدمه: حد ارتفاعات اشکال کثیر الاضلاع مستقیمه محاطیه و محیطیه شعاع دایره است

قضیه سیزدهم

اولاً - نسبت محیط دو دایره بیکدیگر مثل طول اشعه آنها باشد

ثانیاً - نسبت سطوح دو دایره بیکدیگر مثل مربعات همان اشعه باشد



اولاً - محاط میکنیم در دو دایره که شعاع ه ب و ه ا اند دو کثیر الاضلاع منتظم متشابه و م و م محیط آنها باشد و ه و ن و شعاع ه ب و ه ا و ه و د

دو محیط دایره پس ق ۸ $\frac{م}{ه} = \frac{مَ}{ن}$

حال چون عدد اضلاع دو کثیر الاضلاع محاطی را بی اندازه تضعیف کنیم دو محیط م و مَ بی اندازه نزدیک شوند به د و د و بنابراین دو خارج قسمت $\frac{م}{ه}$ و $\frac{مَ}{ن}$ میل کنند بسمت دو حد $\frac{د}{ه}$ و $\frac{دَ}{ن}$ ق ۱۱ و چون از تساوی دو تغیر پذیر تساوی دو حدشان لازم آید

ق ۱۰ پس $\frac{دَ}{ن} = \frac{د}{ه}$ (۱)

ثانیاً - سطح دو دایره را ح و حَ فرض میکنیم و مساحت دو کثیر الاضلاع منتظم متشابه محیطیه را س و سَ پس ق ۸ $\frac{س}{ه^۲} = \frac{سَ}{ن^۲}$

و چون حد دو مقدار $\frac{س}{ه^۲}$ و $\frac{سَ}{ن^۲}$ این دو مقدار است $\frac{ح}{ه^۲}$ و $\frac{حَ}{ن^۲}$ پس ق ۱۰

$\frac{م}{۲ق} = \frac{ح}{۲ه}$ (۲)

شرح - از تساوی (۱) این تساوی استنباط شود

$\frac{م}{۲ق} = \frac{ح}{۲ه}$ (۳)

یعنی که نسبت محیط هر دایره بقطرش مقداریست در جمیع دوایر ثابت و این نسبت را ما در حساب و در قانون ناصری با یک علامت مخصوص نموده‌ایم (وان سه حرف اول کلمات نسبت و محیط و قطر است) و در جمیع ممالک هندسیین آنرا باین علامت π بنمایند و آن حرف یونانی است و پی تلفظ شود و پس نظر باختصار صورتش را نیز ثابت جمهور نموده و در این کتاب بهمین علامت π بنمائیم و مقدار این نسبت اصم است و بتقریب استخراج شود و آن بکسر اعشار تا ده رقم چنین است

π = ۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲ ....

و دستور استخراج این عدد و تقریباً عن قریب بوجهی مختصر بیان میکنیم

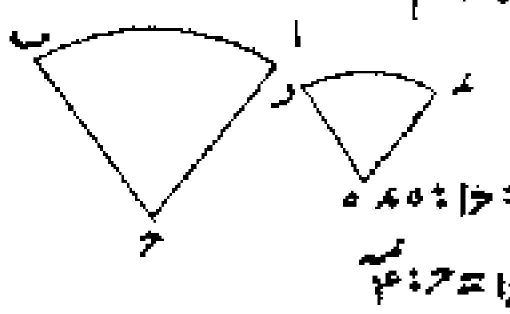
حال چون در تساوی (۳) بجای $\frac{م}{۲ق}$ معادلش π را قرار دهیم این تساوی حاصل میشود $\frac{م}{۲ق} = π$ و بعد م = ۲ π ق (۴) یعنی محیط هر دایره مساویست بضعف π ضرب در شعاع.

تعریف - دو قوس متشابه اب و د ر بر نسبت دو شعاع ج ا و ه د میباشند

ثانیاً دو قطاع متشابه ب ج ا و د ه ر بر نسبت دو مربع همانند شعاع باشند

اولاً بنابر (۲) قوس ب ا : محیط ا ج = ح : ۴ق

و همچنین قوس د ر : محیط ه د = ه : ۴ق



و نظر بتساوی دو زاویه ج و ه این تناسب حاصل شود

قوس ب ا : قوس د ر = محیط ج ا : محیط ه د = ج ا : ه د

ثانیاً بنابر همان (۲) قطاع ا ج ب : دایره ج ا = ح : ۴ق

قطاع ده و : دایره ده = ده : ۴م

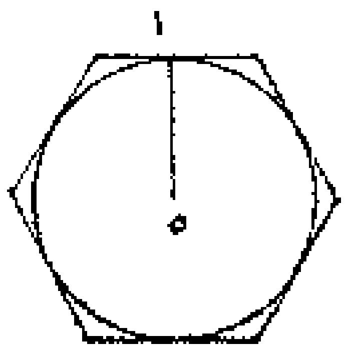
و بنابراین قطاع اجب : قطاع ده و = دایره آج : دایره ده = اج۲ : ده۲

قضیهٔ پانزدهم

مساحت دایره مساویست با حاصل ضرب محیطش در نصف شعاع

بر دایره ۱۰ کثیرالاضلاع منتظمی محیط میکنیم و فرض میکنیم م محیط این کثیرالاضلاع باشد

و سه سطحش و ده شعاع ها باشد پس سه = م × ده/۲



وچون عدد اضلاع کثیرالاضلاع محیطی را بی اندازه تضعیف

کنیم حاصل ضرب م × ده/۲ بی اندازه نزدیک شود

بمحیط ده × ده/۲ و حد سه سطح دایره ده است پس ق ۱۰

دایره ده = محیط ده × ده/۲ و سابق گذشت که محیط ده = ۲ π ده پس بعد از تبدیل

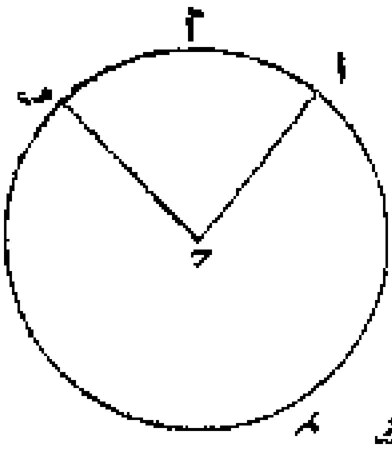
مساحت دایره ده = ۲ π ده × ده/۲ = π ده۲

مثال فرض میکنیم ده = ۳ ۳/۴ و مقدار π را بتقریب ۳٫۱۴۱۵ فرض میکنیم پس

مساحت دایره ده = ۲۸٫۲۷۳۵

نتیجه — مساحت قطاع دایره مساویست با حاصل ضرب طول قوسش در نصف شعاع

برهان — نسبت قطاع اجب بتمام دایره مثل



قوس ام ب است بتمام محیط اب ده ق ۱۲

یا مثل ام ب × اج/۲ است بر اب ده × اج/۲

و مساحت تمام دایره نیست اب ده × اج/۲

پس مساحت قطاع اجب این باشد ام ب × اج/۲

مثال فرض میکنیم شعاع اج = ۱۲ و قوس ام ب مقدارش ۳۰ درجه پس طول آن

این قوس از روی این تناسب بدست آید قوس ا م ب : ۲ π ه = ۶۰ : ۳۶۰

و بنا براین قوس ا م ب = $\frac{\text{۲ π ه × ۶۰}}{\text{۳۶۰}} = \frac{\text{π ه}}{\text{۳}} = \frac{\text{π ۱۲}}{\text{۳}}$ = ۴ π

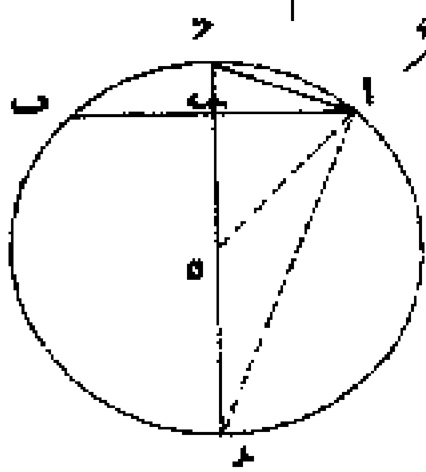
پس ضلع ا ح ب = ۴ π × ۶ = ۲۴ π = ۷۵٫۳۹۸۴۰ ذرع مربع

در مسائل متعلقه باشکال کثیرالاضلاع منتظمه و استخراج نسبت محیط بقطر

قضیهٔ ۲۰ مسئله

در صورتیکه معلوم باشد ضلع کثیرالاضلاع منتظم محاطی و شعاع دایره

ه ر میخواهیم معلوم کنیم ضلع کثیرالاضلاع منتظمه محاطی دیگری را که عدد اضلاعش مضاعف کثیرالاضلاع مفروض باشد



فرض میکنیم ا ب = ک ، ه ح = ر ، و ا ح = ط

و دو خط ا د و ا ه را وصل میکنیم آنوقت در مثلث قائم الزاویه ح ا د این تساوی حاصل شود ا ح^2 = ح د × ح ی یا ط^2 = ۲ ر × ح ی

و چون ح ی = ح ه − ه ی = ر − ه ی

و در مثلث قائم الزاویه ا ه ی این تساوی حاصل شود ه ی = $\sqrt{\text{ا ه}^2 - \text{ا ی}^2} = \sqrt{\text{ر}^2 - \frac{\text{ک}^2}{\text{۴}}}$

پس ح ی = ر − $\sqrt{\text{ر}^2 - \frac{\text{ک}^2}{\text{۴}}}$

و بنا براین ط^2 = ۲ ر × (ر − $\sqrt{\text{ر}^2 - \frac{\text{ک}^2}{\text{۴}}}$) (۱)

و بالعکس اگر ط معلوم باشد بتوان ک را استخراج نمود و در خصوصیت باید دستور (۱) را نسبت به ک حل نمود آخر این دستور حاصل میشود

$\text{ک}^2 = \frac{\text{ط}^2 (\text{۴ ر}^2 - \text{ط}^2)}{\text{ر}^2}$ (۲)

مثال دستور (۱) فرض میکنیم ک ضلع مسدس باشد و بنا براین ک = ر و از قرار

طول ضلع دوازده ضلعی منتظم محاطی چنین میشود

$$\text{ط} = \sqrt{۲\,\text{نق}\left(\text{نق} - \sqrt{\text{نق}^۲ - \frac{\text{نق}^۲}{۴}}\right)} = \sqrt{۲\,\text{نق}^۲\left(۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}\right)} = \text{نق}\sqrt{۲ - \sqrt{۳}}$$

مثال دستور (۲) فرض میکنیم ط ضلع معشر باشد و میخواهیم ضلع مخمس را معلوم کنیم و از سابق میدانیم که $\text{ط} = \frac{\text{نق}(\sqrt{۵} - ۱)}{۲}$ پس

$$\text{م}^۲ = \frac{\frac{\text{نق}^۲(۶ - ۲\sqrt{۵})}{۴}\left(۴\,\text{نق}^۲ - \frac{\text{نق}^۲(۶ - ۲\sqrt{۵})}{۴}\right)}{\text{نق}^۲} = \frac{\text{نق}^۲}{۴}\left(۱۰ - ۲\sqrt{۵}\right)$$

و بنا براین $\text{م} = \frac{\text{نق}}{۲}\sqrt{۱۰ - ۲\sqrt{۵}}$

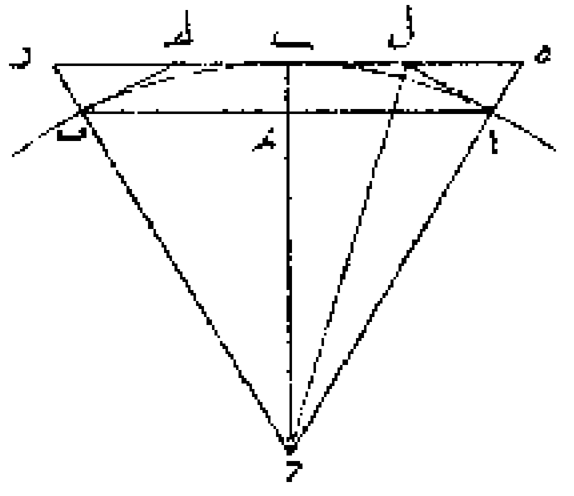
تنبیه — چون مربع شعاع را بر مربع ضلع معشر بیفزائیم این مجموع

$$\text{نق}^۲ + \frac{\text{نق}^۲(۶ - ۲\sqrt{۵})}{۴}$$

مساوی میشود با $\frac{\text{نق}^۲(۱۰ - ۲\sqrt{۵})}{۴}$ که مربع ضلع مخمس باشد پس ضلع مخمس محاطی وتر مثلث قائم الزاویه باشد که یکی از دو ضلع زاویه قائمه اش شعاع دایره باشد و ضلع دیگرش ضلع معشر

قضیهٔ ۱۱ مسئله

در صورتیکه معلوم باشد ضلع کثیر الاضلاع منتظم و شعاع دایره محیطیه اش میخواهیم استخراج کنیم ضلع کثیر الاضلاع محیطی متشابه را



فرض میکنیم $\text{اب} = \text{ک}$ و $\text{جا} = \text{ق}$ و $\text{ده} = \text{م}$

و بتشابه دو مثلث هجد و اجب

$$\text{هد} : \text{اب} = \text{جه} : \text{جا}$$

و نیز $\text{جه} : \text{جا} = \text{جب} : \text{جح}$

پس نظر بنسبت مشترکه $\text{ده} : \text{اب} = \text{جب} : \text{جح}$ یا $\text{م} : \text{ک} = \text{ق} : \text{جح}$ (1)

و در مثلث قائم الزاویه اح د این تساوی حاصل شود د ح = √(د ا² − ا ح²) = √(ﻫ² − ل²/۴)

پس م : ل = ﻫ : √(ﻫ² − ل²/۴) و بنابراین م = ۲ ل ﻫ / √(۴ﻫ² − ل²)

قضیهٔ ۱۸ مسئله

در صورتیکه معلوم باشد ضلع اب از کثیر الاضلاع منتظمی که دارای ع ضلع باشد و شعاع د ا دایرهٔ محیطیه میخواهیم مساحت آن کثیر الاضلاع را استخراج کنیم

فرض میکنیم در شکل سابق اب = ل و د ا = ﻫ و س مساحت شکل باشد

پس س = ع ل × د ح/۲ و د ح = √(ﻫ² − ل²/۴) = ½ √(۴ﻫ² − ل²)

پس س = ع ل √(۴ﻫ² − ل²) / ۴

مثال مطلوب است مساحت مسدس منتظم و ل = ﻫ و ع = ۶ پس

س = ۶ﻫ √(۴ﻫ² − ﻫ²) / ۴ = ۳ﻫ² √۳ / ۲

تنبیه - میتوان از روی همان مفروضات در شکل سابق مساحت کثیر الاضلاع منتظمی را استخراج نمود که دارای ۲ع ضلع باشد

نقطهٔ ی وسط قوس اب است و خط ای را وصل میکنیم و سطح کثیر الاضلاع مطلوب که سَ فرض میکنیم مرکب میشود از ۲ع مثلث متساوی که یکی از آنها ا د ی است

و ا د ی = اح/۲ × ی د = ل × ﻫ / ۴

پس سَ = ۲ع × ل ﻫ/۴ = ع ل ﻫ/۲

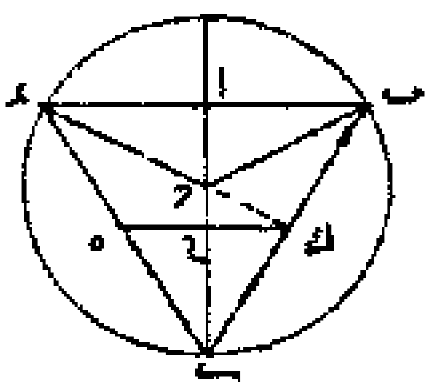
من باب مثال میخواهیم مساحت دوازده ضلعی منتظمی را معلوم کنیم

ل = ﻫ و ع = ۶ و بنابراین سَ = ۶ﻫ²/۲ = ۳ﻫ²

قضیهٔ ۱۹ مسئله

در صورتیکه

در صورتیکه مفروض باشد اندازهٔ شعاع ه و از کثیر الاضلاع منتظم محاطی ارتفاع ن میخواهیم معلوم کنیم شعاع ه' و ارتفاع ن' از کثیر الاضلاع منتظمی را که عدد اضلاعش مضاعف کثیر الاضلاع مفروض باشد و محیطش مساوی آن



فرض میکنیم ب د ضلع کثیر الاضلاع منتظم مفروض باشد و ح مرکزش و ارتفاع ح ا را امتداد میدهیم تا محیط را بر نقطهٔ ـه قطع کند و دو خط ب ـه و د ـه را وصل میکنیم آنوقت ب ـه د زاویهٔ مرکزیهٔ کثیر الاضلاع مطلوب میشود چونکه مقدارش نصف ب ح د است و چون عمود ح ل بر ب ـه فرود آوریم و ل ک را بموازات ب د رسم کنیم طول ل ک نصف ب د میشود و بنا برین ضلع کثیر الاضلاع جدید است و ـه ل شعاعش باشد و ـه ط ارتفاعش را تساوی حاصل شود $\text{ـه ط} = \frac{\text{ـه ا}}{2} = \frac{\text{ح ـه} + \text{ح ا}}{2}$

یا $ن' = \frac{ه + ن}{2}$ (۱)

و خلاصه در مثلث قائم الزاویه ح ل ـه این تساوی حاصل شود $\overline{\text{ـه ل}}^2 = \text{ـه ح} \times \text{ـه ط}$

یا $ه' = \sqrt{ه \times ن'} = \sqrt{ه \times \frac{(ه + ن)}{2}}$ (۲)

شرح این نکته هم از اصل شکل ظاهر است هم از روی دستور که ن' بزرگتر است از ن و برخلاف ه' کوچکتر است از ه و از این قرار در کثیر الاضلاع جدید تفاضل مابین شعاع و ارتفاع کمتر است از آنچه در کثیر الاضلاع مفروض باشد

و چون بهمین وجه کثیر الاضلاع دویم را بسیمی تحویل کنیم و آنرا بچهارم و بهمین قیاس بکثیر الاضلاعی برسیم که تفاضل مابین شعاع و ارتفاعش کوچکتر باشد از هر مقدار مفروضی

برهان - در مثلث ب ح ا این تساوی حاصل شود

ب ح - ح ا < ب ا یا ه - ن < ب ا

ولی ب ا که نصف ضلع کثیر الاضلاع باشد بعد از آنکه عدد اضلاع بی اندازه تضعیف شد کوچکتر از هر مقدار مفروض شود و بنابراین ه - ن نیز تواند کوچکتر شود از هر مقدار که قابل اشاره حسی باشد

قضیهٔ ۲ مسئله

میخواهیم مقدار تقریبی نسبت محیط را بقطر استخراج کنیم

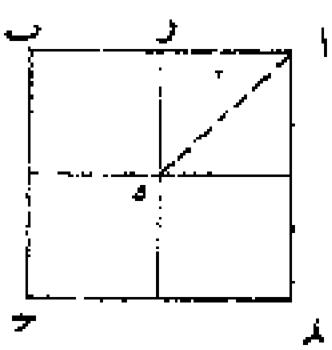
در اشکال سابقه مبرهن شد که محیط ه = π ۲ . ه و دایره ه = π ه^{۲}

و از آنها این دو تساوی استخراج شود $\pi = \frac{\text{محیط ه}}{\text{۲ ه}}$ (۱) $\pi = \frac{\text{دایره ه}}{\text{ه}^{۲}}$ (۲)

و از اینجا چهار قاعده در استخراج مقدار π استنباط شود

زیرا که در دستور (۱) میتوان محیط را معلوم فرض کنیم و شعاعش را استخراج نمود یا بالعکس شعاع را معلوم فرض کرد و محیط را استخراج نمود و در دستور (۲) نیز میتوان شعاع را معلوم فرض کرد و مساحت دایره را استخراج نمود یا مساحت را معلوم فرض کرد و شعاع استخراج نمود

و چون بنای ما بر اصول است بذکر یک قاعده اکتفا کنیم و آن قاعده اول است



که فرض میکنیم محیط ۴ واحد باشد و میخواهیم از آن روی طول شعاعش را معلوم کنیم شکل مربعی بر واحد طول رسم میکنیم پس محیطش چهار واحد شود

و فرض میکنیم ه و ن شعاع و تقاطع این مربع باشد

آنوقت ه = $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ و ن = $\frac{1}{۲}$

حال بشکل سابق این مربع را تحویل میکنیم بمثمنی که محیطش مساوی آن باشد پس این دو مقدار
حاصل شود $ه_۲ = \sqrt{\frac{۲+\sqrt{۲}}{۸}}$ و $ب_۲ = \frac{۱+\sqrt{۲}}{۴}$
و بعد شعاع $ه_۳$ و ارتفاع $ب_۳$ از کثیر الاضلاعی را استخراج کنیم که صاحب ۱۶ ضلع باشد و بهمانطور چون بهمین طریق همواره پیش رویم میرسیم بکثیر الاضلاعی که محیطش همان چهار واحد باشد و تفاضل مابین دو شعاعش $ه_م$ و $ب_م$ بحدی کوچک شود که بخواهیم
و چون دو دایره رسم کنیم یکی بشعاع $ه_م$ و دیگر بشعاع $ب_م$ محیط اولی بزرگتر باشد از ۴ و محیط دومی کوچکتر از آن پس شعاع دایره که محیطش درست چهار واحد باشد واقع میشود مابین $ه_م$ و $ب_م$ و هر چند تقریب خواسته باشیم استخراج شود پس اگر آن دو شعاع را باعشار تحویل کنیم ظاهر است که ارقام مشترکه متعلق باشد بشعاع مطلوب

و مقادیر متتالیه شعاع و ارتفاع کثیرة الاضلاع ۴ ضلعی و ۸ و ۱۶ ...... تا ۸۱۹۲ ضلعی را در جدول آورده‌ایم

عدد اضلاع	ارتفاعات	اشعه
۴	$ب_۱$ = ۰,۵۰۰۰۰۰۰	$ه_۱$ = ۰,۷۰۷۱۰۶۸
۸	$ب_۲$ = ۰,۶۰۳۵۵۳۴	$ه_۲$ = ۰,۶۵۳۲۸۱۵
۱۶	$ب_۳$ = ۰,۶۲۸۴۱۷۴	$ه_۳$ = ۰,۶۴۰۷۲۸۹
۳۲	$ب_۴$ = ۰,۶۳۴۵۷۳۱	$ه_۴$ = ۰,۶۳۷۶۴۳۵
۶۴	$ب_۵$ = ۰,۶۳۶۱۰۸۳	$ه_۵$ = ۰,۶۳۶۸۷۵۴
۱۲۸	$ب_۶$ = ۰,۶۳۶۴۹۱۹	$ه_۶$ = ۰,۶۳۶۶۸۳۶
۲۵۶	$ب_۷$ = ۰,۶۳۶۵۸۷۸	$ه_۷$ = ۰,۶۳۶۶۳۵۷
۵۱۲	$ب_۸$ = ۰,۶۳۶۶۱۱۷	$ه_۸$ = ۰,۶۳۶۶۲۳۷
۱۰۲۴	$ب_۹$ = ۰,۶۳۶۶۱۷۷	$ه_۹$ = ۰,۶۳۶۶۲۰۷
۲۰۴۸	$ب_{۱۰}$ = ۰,۶۳۶۶۱۹۲	$ه_{۱۰}$ = ۰,۶۳۶۶۱۹۹
۴۰۹۶	$ب_{۱۱}$ = ۰,۶۳۶۶۱۹۵	$ه_{۱۱}$ = ۰,۶۳۶۶۱۹۷
۸۱۹۲	$ب_{۱۲}$ = ۰,۶۳۶۶۱۹۶	$ه_{۱۲}$ = ۰,۶۳۶۶۱۹۶

و از استقرار دایره که محیطش چهار واحد باشد شعاعش این میشود ....۰٫۶۳۶۶۱۹۹

پس نسبت محیط بقطر چنین باشد ....۳٫۱۴۱۵۹۲۶ = ۴۰۰۰۰۰۰۰۰ / ۱۲۷۳۲۳۹۲

ارشمیدس مهندس مشهور که ۲۸۷ سال شمسی قبل از مسیح در سیراکوز متولد شده مقدار این نسبت تقریباً تا ۲۲/۷ بدست آورده و متیوس مهندس که در حدود هزار هجری حیات داشته این مقدار را ۳۵۵/۱۱۳ بدست آورده و چون آنرا باعشار تحویل کنیم تا ۶ رقمش موافق است و طریق ضبطش چنین است که اعداد فرد ۱ و ۳ و ۵ هر کدام را دو مرتبه از یسار به یمین بنویسند تا ۱۱۳۳۵۵ و سه رقم اول مخرج کسر قرار دهید و سه رقم ثانی را صورت و در عصر ما تا یکصد و پنجاه و چهار رقم اعشارش بدست آمده و اگر چه هرگز از آن رقم هفت بیشتر استعمال نکنند ولی چون علامت ترقی و تکمیل علم است ما در اینجا آوردیم

۳٫۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵۸۹۷۹۳۲۳۸۴۶۲۶۴۳۳۸۳ –
– ۲۷۹۵۰۲۸۸۴۱۹۷۱۶۹۳۹۹۳۷۵۱۰۵۸۲۰ –
– ۹۷۴۹۴۴۵۹۲۳۰۷۸۱۶۴۰۶۲۸۶۲۰۸۹۹۸ –
– ۶۲۸۰۳۴۸۲۵۳۴۲۱۱۷۰۶۷۹۸۲۱۴۸۰۸۶ –
– ۵۱۳۲۸۲۳۰۶۶۴۷۰۹۳۸۴۴۶۰۹۵۵۰۵۸۲ –
– ۳۷۱۷۲۵۳۵۹۴۰۸۱۲۸۴۸۰۲ . . . .

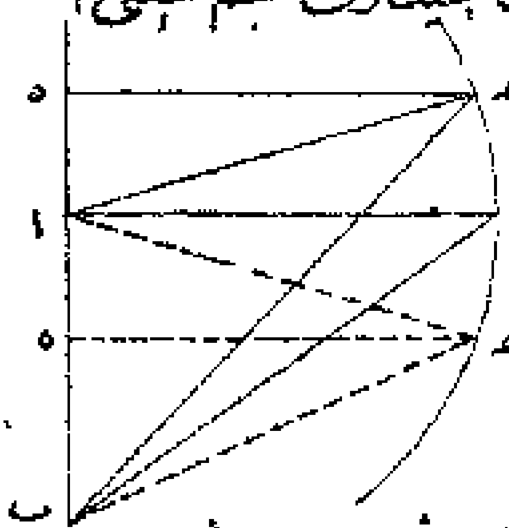
ضمیمهٔ مقالهٔ چهارم

تعریف – در میان جمیع مقادیر یکه از یک نوع باشند اعظم را بلغت لاتین ماکزیمم یعنی بزرگترین گویند و اصغر را مینیمم و این دو کلمه اکنون در جمیع لغات بهمین دو معنی معروف شده‌اند و ما نیز در مقام ضرورت استعمال کنیم مثلاً میان جمیع اوتار که مابین یک سر و نقطهٔ محیط دایره وصل شوند قطر ماکزیمم است و میان جمیع خطوطیکه از نقطهٔ مفروضه بخطی مفروض وصل شوند عمود مینیمم است

اشکال متساویة المقدار آنها باشند که طول محیطشان برابر باشند

قضیهٔ اول

میان جمیع مثلثاتیکه ترکیب شوند از دو ضلع مفروض بنابر آنکه زاویهٔ حادثه ما بین آنها تغیر پذیر باشد و اختیاری اعظم مثلثی است که از دو ضلعش زاویهٔ قائمه حادث کنند



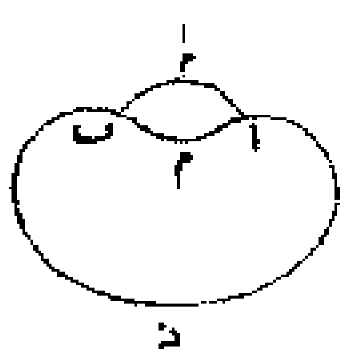
مثلا در دو مثلث ب ا ج و ب ا د که ضلع ب ا مشترک است و ضلع ا ج = ا د و زاویه ب ا ج قائمه کو هم مثلث ب ا ج اعظم است از مثلث ب ا د که زاویه ا در آن حاده باشد یا منفرجه بر قاعده ا ب چون در همه مشترک است اندو مثلث بر نسبت و ارتفاع ا ج و د ه باشند ولی عمود د ه اقصر است از دو مائل متساوی ا د و ا ج پس مثلث ب ا د کوچکتر است از مثلث ب ا ج و همچنین حکم کلی است در سایر مثلثات

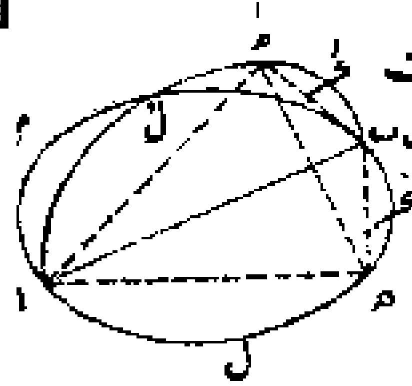
قضیهٔ دوم ۲

در جمیع اشکال مسطحهٔ متساویة الدور سطح دائره اعظم باشد

اولا این قدر معلوم است که بر فرض اتحاد طول محیط اشکال بیشمار دیده میشود که از حیثیت صورت و وسعت مختلف باشند ولی این اختلاف بی اندازه نباشد و وسعت شکل تا حد معینی ترقی کند پس فرض میکنیم که ما بین همه اشکال متساویة الدور یک شکل اعظم یا بیشتر موجود باشند

ثانیا آن شکل که در محیط مفروض سطحش اعظم است محدب باشد زیرا که اگر در خط مسدود غیر محدب ا م ب ه قطعه مقعر ا م ب را حول دو نقطه ا و ب دوران دهیم تا بوضع ا م' ب قرار گیرد شکل جدید ا م' ب ه





محیطش برابر شکل اول است ولی سطحش اعظم از او است

ثانیاً اگر ا م ب ﻫ شکل اعظم باشد بمحیط مفروض خط آ ب
آن محیط را نصف کرده باشد و نیم سطح شکل را نیز بدو قطعه متساوی
قسمت نموده زیرا که اگر بگوئید قطعه ا ﻫ ب اعظم است
از ا م ب آن را حول خط ا ب دوران میدهیم تا قرار گیرد برا ﻫ' ب آن وقت شکل ا ﻫ ب ﻫ'
محیطش مساوی میشود با ا م ب ﻫ و مساحتش اعظم پس شکل مفروض ا م ب ﻫ اعظم نمی‌شود
از آنچه ذکر شد نیز معلوم میشود که اگر ا م ب ﻫ شکل اعظم باشد ا ﻫ' ب ﻫ نیز اعظم است و در
شکل اخیر هر عمودی که بر ا ب اخراج کنیم مثل ﻫ ﻫ' آن خط نصف میشود بر وجهی که دو
مثلث ا ﻫ ب و ا ﻫ' ب متساوی میگردند

بعد از این مقدمات اگر در زاویا ﻫ ب و ا ﻫ' ب قائمه نباشند میتوان سطح هر دو مثلث
ا ﻫ ب و ا ﻫ' ب را بمرتبه وسعت داد بی آنکه تغییری در طول اضلاع ا ﻫ و ﻫ ب و ا ﻫ'
و ﻫ' ب عارض شود و نه در طول قطعات ا ل ﻫ و ﻫ ل ب و ا ل' ﻫ' و ﻫ' ل' ب بلی
همان نقطه ا ب تنها تغییر کند پس با نمعنی سطح شکل وسعت یابد بی آنکه طول محیطش تغییر کند
و این خلاف فرض است پس دو زاویه ﻫ و ﻫ' قائمه باشند و نقطه ﻫ که ما فرض نمودیم تحقیقاً
بود در هر جای محیط ا ﻫ ب میتوان قرار داد و پس از این خط ا ب شکل نصف دایره است
بنابر این معلوم شد که اگر خطی شکل اعظم را نصف کند قطعه‌اش نصف دایره است پس خود شکل دایره است

قضیهٔ ششم

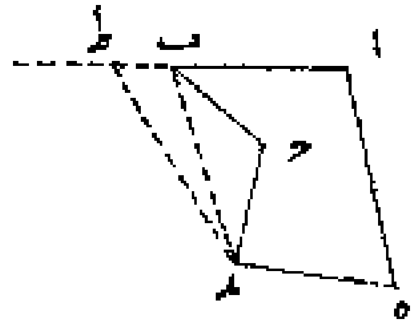
میان جمیع اشکال مسطحهٔ متساویة السطح دایره محیطش اقصر است

برهان اگر شکلی یافت شود و سعت م که محیطش اقصر از دایره باشد و مساحتش برابر
آن میتوان بحکم قضیهٔ سابقه مبدل کرد از بدایره که صاحب همان محیط باشد و سطحش مه

اعظم باشد از ا
پس این دایره ثانی سطحش اعظم شود از دایره اول و محیطش اقصر و این محالست

قضیهٔ چهارم

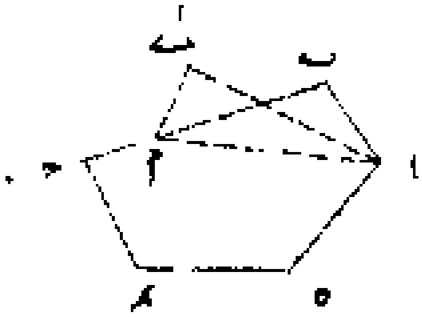
هر کثیر الاضلاعی مثل اب ج د ه را که دارای یک زاویهٔ مقعر باشد میتوان
مبدل نمود بکثیر الاضلاعی محدب که وسعتش بیشتر باشد و محیطش
برابر و یک ضلعش کمتر



برهان چون اب را امتداد دهیم نقاط مختلفه بیشمار را
وصل کنیم بنقطه د مجموع ب ط + ط د روی بتزاید
ابتدا از ب د الی غیر نهایه میرود پس ناچار نقطه یافت
شود مثل ط که اینجا ب ط + ط د = ب ج + ج د
و در آن نقطه کثیر الاضلاعی ترکیب شود مثل اب ط د ه که وسعتش ظاهرا اعظم است
از شکل مفروض و محیطش برابر وست و یک ضلع کمتر دارد

قضیهٔ پنجم

از جمیع اشکال کثیر الاضلاع متساویة المحیط که عدد اضلاعشان متساوی
باشد کثیر الاضلاع منتظم اعظم است

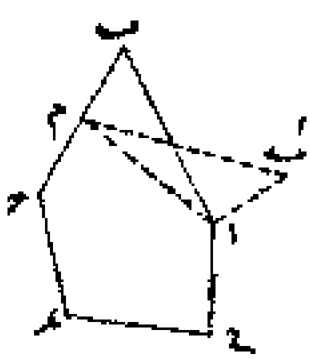


برهان در اثبات حکم مذکور باین وجه پیش میرویم که
اگر کثیر الاضلاعی جمیع اضلاعش متساوی نباشند
و همچنین جمیع زوایایش در جملهٔ اشکال متساویة الدوره
که یک عدد ضلع باشند چنین شکل اعظم نتواند شد
اولا فرض میکنیم کثیر الاضلاع اب ج د ه صاحب ع ضلع باشد و اب ز ب ج

وبر ب ه نقطه م را انقدر نزدیک به ه فرض میکنیم که باز اب < ب م و بعد زاویه ام بَ را مساوی ب ام رسم میکنیم و م بَ را مساوی اب جدا میکنیم و خط اَبَ را وصل میکنیم و مثلث ابَم مساوی میشود با مثلث اب م

ازاینجا معلوم شد که میتوان کثیر الاضلاع اب ه د ه را مبدل نمود بکثیر الاضلاع اَبَ م ه د ه که صاحب همان وسعت و همان محیط باشد جز انکه عدد اضلاعش ۹ + ۱ است و دارای یک زاویه مقعر است زیرا که اب چون قصر است از ب م زاویه ب م ا اصغر میشود از ب ا م یا از بَ م ا

و کثیر الاضلاع ثانی را بر قضیه سابقه میتوان مبدل نمود بشکلی دیگر که صاحب ۹ ضلع باشد و همان محیط و وسعتش بیشتر باشد پس معلوم شد که در جمله اشکال متساویة الحدود ده ضلعی شکل اب ه د ه مختلف الاضلاع اعظم نیست



ثانیاً در کثیر الاضلاع ۶ ضلعی اب ه د ع فرض میکنیم زاویه ا > ب و نقطه م را انقدر نزدیک به ب فرض میکنیم که زاویه م ا ع باز اعظم باشد از ا م ه

و زاویه م اَبَ را مساوی ا م ب رسم میکنیم و ضلع اَبَ را مساوی م ب جدا میکنیم و خط م بَ را وصل میکنیم و مثلث م اَبَ مساوی میشود با مثلث ا ب م و کثیر الاضلاع اَبَم ه د ع وسعت و محیطش برابر میشود با اب ه د ع ولی عدد اضلاعش ۶ + ۱ است و دارای یک زاویه مقعر است زیرا که چون ام ه + ا م ب = ۲ قائمه پس م ا ع + م اَبَ > ۲ قائمه و این کثیر الاضلاع را میتوان مبدل نمود بشکلی دیگر که صاحب ۶ ضلع باشد و همان محیط و وسعتش بیشتر پس اب ه د ع اعظم نیست

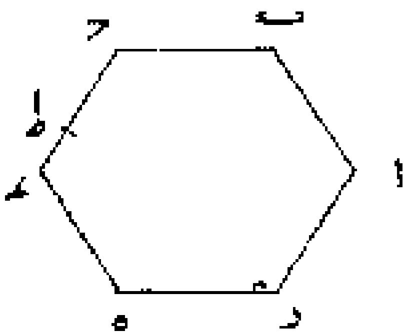
قضیه ششم

از جمیع اشکال کثیر الاضلاع متساویة الوسعه که عدد اضلاع ایشان متساوی باشد کثیر الاضلاع منتظم محیطش اقصر است

برهان اگر کثیر الاضلاع غیر منتظمی که صاحب ن ضلع باشد و وسعت م محیطش اقصر شود از کثیر الاضلاع منتظمی که همان وسعت باشد و صاحب همان عدد اضلاع میتوانیم بحکم قضیه سابقه مبدل کنیم آنرا بکثیر الاضلاع منتظمی که همان دوره باشد و صاحب ن ضلع و وسعتش از م اعظم باشد از م پس این کثیر الاضلاع منتظم ثانی هم در اضلاعش برابر باشد و محیطش اقصر و وسعتش بیشتر و این محال است

قضیه هفتم

اندر کثیر الاضلاع منتظم متساویة الدوره آنکه عدد اضلاعش بیشتر باشد اعظم است

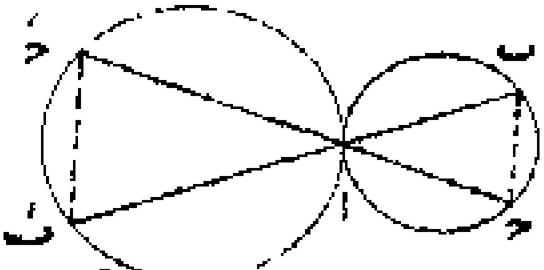


برهان فرض میکنیم ا ب ج د ه و کثیر الاضلاع منتظم شش ضلعی باشد و نقطه ط را بر یکی از اضلاع نشان میکنیم آنوقت میتوان شکل را کثیر الاضلاع غیر منتظم هفت ضلعی فرض نمود که زاویه حادثه بین ج و ضلعش ط ج و ط د دو قائمه باشد و چنین کثیر الاضلاع بنابر قضیه ۵ کوچکتر است از کثیر الاضلاع منتظم هفت ضلعی که همان دوره باشد فهو المطلوب

احکام مبرهن شونده

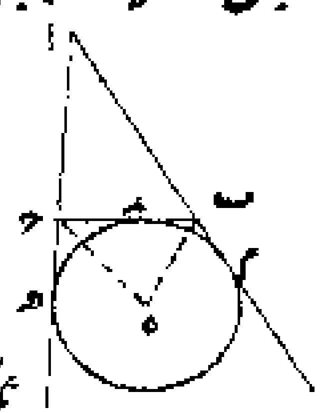
۱ـ اوّل شکلی که رؤس زوایایش اوساط اضلاع هر ذواربعه اضلاع باشد متوازی الاضلاع است

۲ـ از نقطه مفروضه در درون مثلث متساوی الاضلاع چون سه عمود بر اضلاعش فرود آوریم مجموع آنها مقداری شود ثابت و این حکم را در نقطه خارج مثلث نیز تحقیق کنید و ببینید چه صورتی پیدا می‌کند



۳ـ چون بر نقطه تماس ا از دو دایره مماس ب دو قاطع ب ا د و ج ا ه را مرور دهیم ثابت کنید که دو خط ب ج و د ه متوازی هستند

۴ـ در هر ذواربعه اضلاع محیط بر دایره مجموع هر دو ضلع مقابل مساوی است با مجموع دو ضلع دیگر (عکس این مسئله نیز صحیح است)



۵ـ دایره و را مماس می‌کنیم بدو ضلع زاویه ا و خط ب د ج را مماس می‌کنیم بدایره و منتهی می‌نمائیم بدو ضلع زاویه پس مبرهن کنید که اوّلاً محیط مثلث ا ب ج ثابت است در هر جا از قوس م د ه نقطه تماس فرض شود و ثانیاً مقدار زاویه ب و ج ثابت است

۶ـ چون مواقع سه ارتفاع مثلثی را با هم وصل کنیم مثلثی جدید ترکیب شود که خطوط منصف زوایایش ارتفاعات مثلث اول باشند

۷ـ مواقع سه ارتفاع مثلث و اوساط سه ضلعش بر محیط دایره واقع شوند بر هر سه

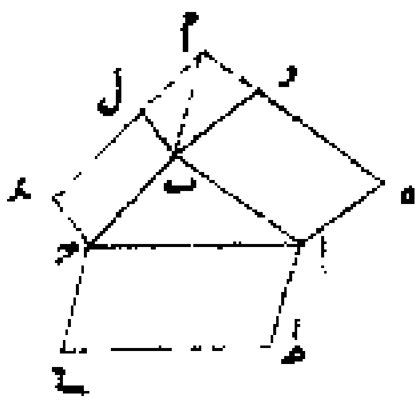
۸ـ در شکل ذواربعه اضلاع چون بر سه ضلع متوالیش دایره مماس کنیم از مراکز چهار دایره مماسه که بدست می‌آید ذواربعه اضلاعی ترکیب شود که قابل محاط شدن در دایره باشد

۹ـ دو خط منصف دو زاویه حادثه مابین هر دو ضلع متقابل ذواربعه اضلاع محاطی زاو

قائمه متقاطع شوند

۱۰- چون از نقطهٔ مفروضه بر دایرهٔ محیطه بر مثلثی سه عمود بر سه ضلع آن مثلث فرود آوریم مواقع آنها بر خطی مستقیم واقع شوند

۱۱- بر دو ضلع اب و ب ج از مثلث ا ب ج دو متوازی الاضلاع مثل اب ره د ب ج ط ل رسم کنیم و دو ضلع ه د و ط ل را امتداد میدهیم تا نقطهٔ م و خط م ب را وصل میکنیم و با ج بر ضلع ا ج متوازی الاضلاعی رسم میکنیم که ضلع مجاورش مساوی و موازی باشد با م ب پس ثابت کنید که این متوازی الاضلاع معادلست با مجموع دو شکل دیگری و از اینجا شکل عروس را استنباط نمائید



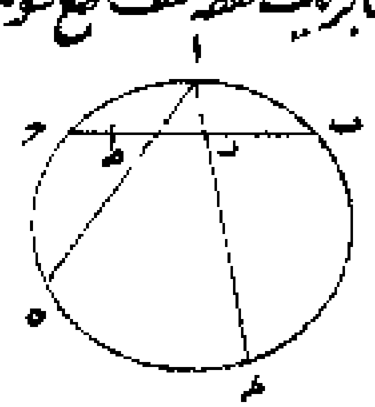
۱۲- سه ارتفاع هر مثلث بر یک نقطه متقاطع شوند

۱۳- خطوط واصله ما بین رئوس مثلث و اوساط اضلاع مقابلش بر یک نقطه متقاطع شوند

۱۴- نقطهٔ تقاطع سه ارتفاع مثلث و نقطهٔ تقاطع خطوط منصّف قواعدش و مرکز دایرهٔ محیطهٔ آنش بر خطی مستقیم واقع شوند و فاصله ما بین دو نقطهٔ اوّل مضاعف فاصله ما بین دو نقطهٔ آخرست

۱۵- چون از نقطهٔ مفروضه دو خط رسم کنیم که قاطع دایره شوند و عمود بر همدیگر مجموع دو مربع دو وتر مقداری شود ثابت

۱۶- چون سه دایره دو بدو متقاطع شوند سه وتر فصل مشترک آنها بر یک نقطه متقاطع شوند



۱۷- چون از نقطهٔ اوسط قوس ب ج دو قاطع ا د و ا ط ه را رسم کنیم چهار نقطهٔ د و ر و ط و ه بر محیط دایره واقع شوند

۱۸- چون سه دایره همدیگر را دو بدو مماس کنند