

- **زمان خورشیدی**

زمان ظاهری خورشیدی، فاصله میان گذرهای متوالی خورشید است که از یک طول جغرافیایی مشخص، مشاهده می‌شود. به صورت قراردادی ۱۲ ساعت به لحظه گذر خورشید نصف النهار محلی یا گرینویچ اضافه می‌شود تا شروع یک شبانه روز در نیمه شب قرار گیرد.

- **زمان جهانی (UT)**

از آنجا که مدار حرکت زمین به دور خورشید، دایره‌ای شکل نمی‌باشد، لذا شاهد تغییر طول روزها در طی سال هستیم. این بی‌نظمی‌های موجود در حرکت ظاهری خورشید سبب ایجاد مشکل در محاسبات می‌شود. از اینرو زمان جهانی (UT) بر مبنای خورشید ظاهری متوسط که دارای حرکت یکنواخت می‌باشد تعریف شده است.

سه نسخه از زمان جهانی با اندکی تفاوت بنام های  $UT_0$ ،  $UT_1$  و  $UT_2$  ارائه شده اند که اختلاف میان آن‌ها ناچیز بوده و تنها در کارهای دقیق مورد توجه قرار می‌گیرد. زمان  $UT_0$  به عنوان زمان جهانی خام بر اساس مشاهدات نجومی در ایستگاه های زمینی معینی بدون هیچ نوع تصحیحی بدست می‌آید. اگر تصحیح مربوط به حرکت قطبی به زمان  $UT_0$  اعمال گردد، در این صورت زمان  $UT_1$  حاصل می‌شود که مستقل از موقعیت ایستگاه است. چنانچه تصحیحات مربوط به تغییرات فصلی نیز به زمان  $UT_1$  اعمال شود، زمان  $UT_2$  بدست می‌آید که مطلق در نظر گرفته می‌شود.

### زمان های اتمی

- **زمان اتمی بین المللی (TAI)**

همان طور که از نام آن مشخص است، در این دستگاه مرجع زمان از ساعت‌های اتمی استفاده می‌شود. زمان اتمی که مقیاس زمانی پایه را برای سرویس‌های نگهداری زمان (time-keeping) تعیین می‌نماید، زمان اتمی بین المللی (TAI) می‌باشد. زمان اتمی بین المللی بر پایه شمارش سیکل‌های یک جریان الکتریکی با فرکانس بالا استوار است که از رزنانس انتقال اتمی سزیم ۱۳۳ حاصل می‌شود. شایان ذکر است که اثرات

نسبیتی مانند موقعیت ساعت نسبت به ژئوئید، بر نرخ این سیکل‌ها اثرگذار است. واحد زمان اتمی در سطح آب‌های آزاد، ثانیه SI است. یک ثانیه SI برابر است با  $9192631770$  دوره تناوب انتقال الکترون میان دو سطح تراز فوق ظریف از حالت پایه اتم سزیم  $^{133}\text{Cs}$ ، در دمای صفر درجه کلوین [18].

#### • زمان جهانی هماهنگ (UTC)

رایج‌ترین زمان مورد استفاده، زمان جهانی هماهنگ (UTC) است که از زمان اتمی مشتق شده است. زمان UTC با فاصله  $\pm 0,9$  ثانیه، از زمان UT1 تبعیت می‌کند ( $\Delta UT1 = UT1 - UTC$ ). با توجه به تغییرات نامنظم UT1 بر اثر نامنظمی‌های موجود در دوران زمین، می‌بایست ثانیه‌های جهشی به صورت دوره‌ای به زمان UTC اضافه شود تا اختلاف معین میان دو مقیاس زمانی حفظ شود. ثانیه‌های جهشی در آخر ژوئن یا دسامبر اضافه می‌شوند.

#### • زمان GPS (GPS time)

سامانه‌های تعیین موقعیت ماهواره ای هر یک دستگاه مرجع زمان مخصوصی برای خود ایجاد و نگهداری می‌کنند. بر همین اساس سامانه GPS نیز از دستگاه مرجع زمان مختص خود موسوم به زمان GPS برخوردار است. این دستگاه مرجع زمان بر پایه زمان اتمی تعریف شده است و ارتباط مشخصی با زمان جهانی هماهنگ (UTC) دارد. به عنوان مثال اختلاف بین این دو در ۵ ژانویه ۱۹۸۰ صفر و در سال ۲۰۰۳ تقریباً ۱۳ ثانیه گزارش شده است [1]. این اختلافات به طور دائم توسط مراکز ذیربط محاسبه و در سایت‌های مرتبط به خود نظیر USNO و BIPM برای عموم انتشار می‌یابند.

#### زمان دینامیکی

در بسیاری از معادلات نجومی حرکت، مرکز جرم منظومه شمسی به عنوان مرجع انتخاب می‌گردد و بنابراین دستگاه مرجع زمان مورد نیاز باید مفهوم زمان اینرشیال را در خود حفظ نموده و اثرات نسبیتی را نیز در نظر گرفته باشد. به همین جهت دستگاه‌های مرجع زمان دینامیکی زمینی (TDT) و زمان دینامیکی باریسنتریک (barycentric) (TDB) به ترتیب برای استفاده در معادلات دیفرانسیلی حرکت مداری ماهواره‌ها به دور

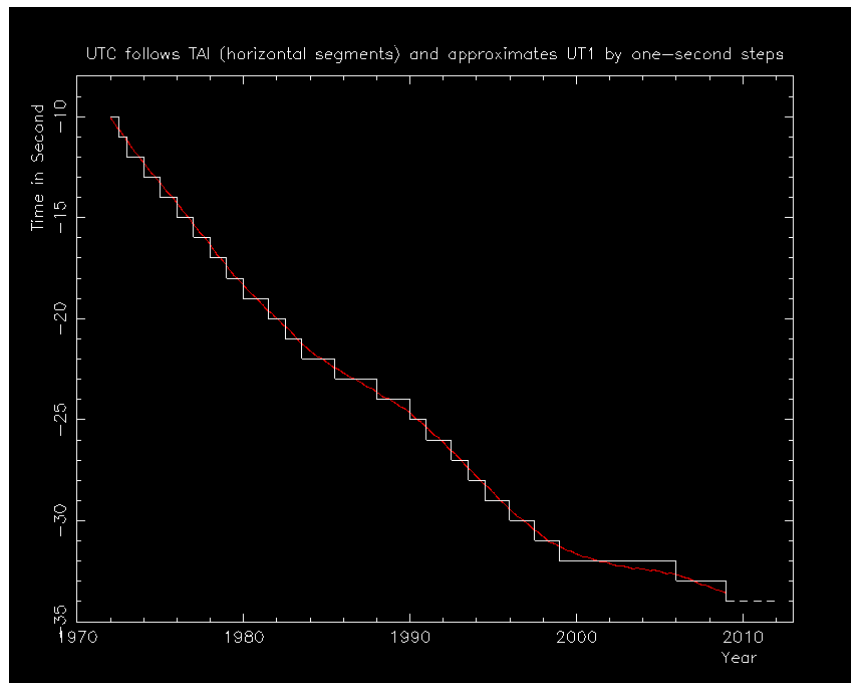
زمین و معادلات حرکت اجرام سماوی معرفی و جایگزین زمان نجومی شدند. بعد ها IAU زمان زمینی (TT) را به عنوان نام جدید زمان دینامیکی زمینی معرفی نمود.

### تبدیلات بین زمان های مرجع

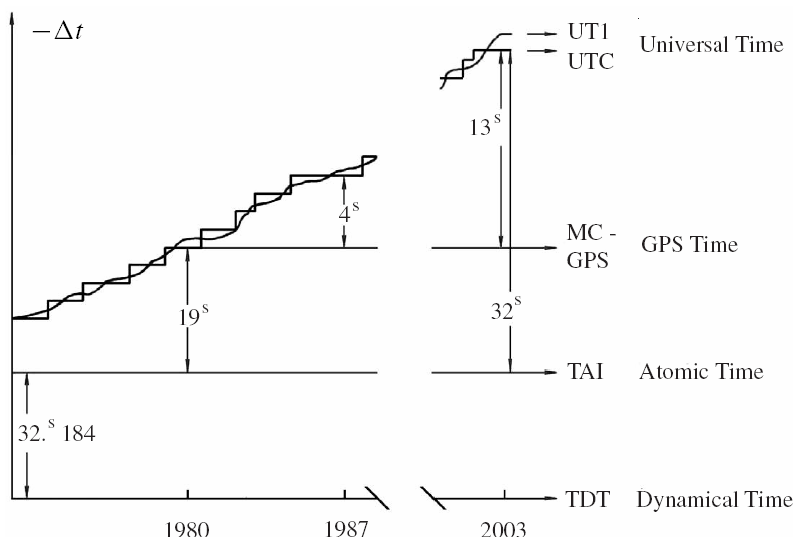
ارتباط این زمان با سایر زمان ها به صورت زیر است (نگاره های ۱۳ و ۱۴) [1]:

$$\begin{aligned} UT1 &= UTC + dUT1 \\ TAI &= GPST + 19.000s \\ TAI &= TDT - 32.184s \\ TAI &= UTC + 1.000s \times n \end{aligned} \quad (24)$$

که در آن  $dUT1$  بیانگر تفاوت بین زمان  $UTC$  و زمان  $UT1$  با قید کمتر از ۰٫۹ ثانیه و  $n$  عدد صحیح مربوط به جهش های یک ثانیه ای است که هنگام بروز تفاوت بیش از ۰٫۹ ثانیه اعمال می شود. مقادیر  $dUT1$  و  $n$  به صورت رسمی توسط IERS محاسبه و منتشر می شوند. برای مثال مقدار  $n$  برای اول ژانویه سال ۲۰۰۹ توسط IERS ۳۴ ثانیه محاسبه و اعلام شده است.



نگاره ۱۳- اختلاف بین زمان های  $UTC$  و  $UT1$  [13]



نگاره ۱۴- ارتباط بین زمان های مورد استفاده در ژئودزی ماهواره ای [1]

## تاریخ و تقویم در ژئودزی ماهواره ای

### • تاریخ ژولین

یکی از مفاهیم ضروری در مکانیک سماوی، تاریخ ژولین است. تاریخ ژولین (JD) تعداد روزهای خورشیدی متوسط سپری شده از ساعت ۱۲:۰۰ روز اول ژانویه سال ۴۷۱۳ قبل از میلاد در یک دوره ۷۹۸۰ سالی می باشد. تاریخ ژولین از ظهر هر روز آغاز می گردد تا ستاره شناسان بتوانند تمامی مشاهدات خود را در یک روز انجام دهند. تاریخ ژولین در فاصله زمانی بین اول مارس ۱۹۰۰ تا ۲۸ فوریه ۲۱۰۰، با استفاده از الگوریتم زیر بدست می آید [19].

$$JD = INT[365.25y] + INT[30.6001(m + 1)] + D + UT / 24 + 1720981.5 \quad (25)$$

$$y = Y - 1 \quad \text{and} \quad m = M + 12 \quad \text{if} \quad M \leq 2$$

$$y = Y \quad \text{and} \quad m = M \quad \text{if} \quad M > 2$$

در رابطه فوق، سال (Y)، ماه (M)، روز (D) و زمان حقیقی بر حسب ساعت (UT) معلوم هستند و وظیفه تابع INT، گرد کردن عدد حقیقی به یک عدد صحیح می باشد. توجه شود که سال باید به صورت چهار رقمی

وارد شود. از آنجا که مقدار عددی JD بزرگ است، برای سادگی محاسبات، تاریخ ژولین اصلاح شده موسوم به MJD به صورت زیر پیشنهاد شده است:

$$MJD = JD - 2400000.5 \quad (26)$$

به این ترتیب ضمن اینکه مقدار عددی تاریخ ژولین کمتر می شود، شروع هر روز نیز از ظهر به نیمه شب تبدیل خواهد شد. همچنین رابطه معکوس تبدیل تاریخ ژولین به تاریخ معمولی به صورت زیر می باشد [19].

$$\begin{aligned} a &= INT[JD + 0.5] \\ b &= a + 1537 \\ c &= INT[(b - 122.1) / 365.25] \\ d &= INT[365.25c] \\ e &= INT[(b - a) / 30.6001] \\ D &= b - d - INT[30.6001e] + FRAC[JD + 0.5] \\ M &= e - 1 - 12INT[e / 14] \\ Y &= c - 4715 - INT[(7 + M) / 10] \end{aligned} \quad (27)$$

که در آن  $a, b, c, d, e$  یکسری ضرایب کمکی و تابع  $FRAC$  بخش کسری عدد را بدست می دهد. شماره هفته GPS نیز با مبدا قرار دادن ۶ ژانویه ۱۹۸۰ از رابطه زیر بدست می آید [19].

$$WEEK = INT[(JD - 2444244.5) / 7] \quad (28)$$

به عنوان مثال تاریخ ژولین و شماره هفته GPS برای اول ژانویه ۲۰۰۰ بر اساس روابط فوق به ترتیب ۲۴۵۱۵۴۵٫۰ و ۱۰۴۲ بدست می آیند. نکته حائز اهمیت اینکه بدلیل محدودیت تخصیص فضا در پیام های ناوبری GPS برای هفته GPS (۱۰ بیت)، هر ۱۰۴۲ هفته این عدد صفر می شود که می بایست تصحیح مربوطه در پردازش داده ها منظور شود. بطور نمونه در جدول (۴) تقویم GPS برای سال ۲۰۰۹ و ارتباط آن با تقویم معمولی میلادی آمده است (<http://www.ngs.noaa.gov/CORS/gpscal2009.txt>).

جدول ۴ - تقویم GPS برای سال ۲۰۰۹ و ارتباط آن با تقویم معمولی میلادی

2009 GPS CALENDAR 2009							
GPSwk	Sunday 0	Monday 1	Tuesday 2	Wednesday 3	Thursday 4	Friday 5	Saturday 6
1512					1 JA 001	2 JA 002	3 JA 003
1513	4 JA 004	5 JA 005	6 JA 006	7 JA 007	8 JA 008	9 JA 009	10 JA 010
1514	11 JA 011	12 JA 012	13 JA 013	14 JA 014	15 JA 015	16 JA 016	17 JA 017
1515	18 JA 018	19 JA 019	20 JA 020	21 JA 021	22 JA 022	23 JA 023	24 JA 024
1516	25 JA 025	26 JA 026	27 JA 027	28 JA 028	29 JA 029	30 JA 030	31 JA 031
1517	1 FE 032	2 FE 033	3 FE 034	4 FE 035	5 FE 036	6 FE 037	7 FE 038
1518	8 FE 039	9 FE 040	10 FE 041	11 FE 042	12 FE 043	13 FE 044	14 FE 045
1519	15 FE 046	16 FE 047	17 FE 048	18 FE 049	19 FE 050	20 FE 051	21 FE 052
1520	22 FE 053	23 FE 054	24 FE 055	25 FE 056	26 FE 057	27 FE 058	28 FE 059
1521	1 MR 060	2 MR 061	3 MR 062	4 MR 063	5 MR 064	6 MR 065	7 MR 066
1522	8 MR 067	9 MR 068	10 MR 069	11 MR 070	12 MR 071	13 MR 072	14 MR 073
1523	15 MR 074	16 MR 075	17 MR 076	18 MR 077	19 MR 078	20 MR 079	21 MR 080
1524	22 MR 081	23 MR 082	24 MR 083	25 MR 084	26 MR 085	27 MR 086	28 MR 087
1525	29 MR 088	30 MR 089	31 MR 090	1 AP 091	2 AP 092	3 AP 093	4 AP 094
1526	5 AP 095	6 AP 096	7 AP 097	8 AP 098	9 AP 099	10 AP 100	11 AP 101
1527	12 AP 102	13 AP 103	14 AP 104	15 AP 105	16 AP 106	17 AP 107	18 AP 108
1528	19 AP 109	20 AP 110	21 AP 111	22 AP 112	23 AP 113	24 AP 114	25 AP 115
1529	26 AP 116	27 AP 117	28 AP 118	29 AP 119	30 AP 120	1 MY 121	2 MY 122
1530	3 MY 123	4 MY 124	5 MY 125	6 MY 126	7 MY 127	8 MY 128	9 MY 129
1531	10 MY 130	11 MY 131	12 MY 132	13 MY 133	14 MY 134	15 MY 135	16 MY 136
1532	17 MY 137	18 MY 138	19 MY 139	20 MY 140	21 MY 141	22 MY 142	23 MY 143
1533	24 MY 144	25 MY 145	26 MY 146	27 MY 147	28 MY 148	29 MY 149	30 MY 150
1534	31 MY 151	1 JE 152	2 JE 153	3 JE 154	4 JE 155	5 JE 156	6 JE 157
1535	7 JE 158	8 JE 159	9 JE 160	10 JE 161	11 JE 162	12 JE 163	13 JE 164
1536	14 JE 165	15 JE 166	16 JE 167	17 JE 168	18 JE 169	19 JE 170	20 JE 171
1537	21 JE 172	22 JE 173	23 JE 174	24 JE 175	25 JE 176	26 JE 177	27 JE 178
1538	28 JE 179	29 JE 180	30 JE 181	1 JL 182	2 JL 183	3 JL 184	4 JL 185
1539	5 JL 186	6 JL 187	7 JL 188	8 JL 189	9 JL 190	10 JL 191	11 JL 192
1540	12 JL 193	13 JL 194	14 JL 195	15 JL 196	16 JL 197	17 JL 198	18 JL 199
1541	19 JL 200	20 JL 201	21 JL 202	22 JL 203	23 JL 204	24 JL 205	25 JL 206
1542	26 JL 207	27 JL 208	28 JL 209	29 JL 210	30 JL 211	31 JL 212	1 AU 213
1543	2 AU 214	3 AU 215	4 AU 216	5 AU 217	6 AU 218	7 AU 219	8 AU 220
1544	9 AU 221	10 AU 222	11 AU 223	12 AU 224	13 AU 225	14 AU 226	15 AU 227
1545	16 AU 228	17 AU 229	18 AU 230	19 AU 231	20 AU 232	21 AU 233	22 AU 234
1546	23 AU 235	24 AU 236	25 AU 237	26 AU 238	27 AU 239	28 AU 240	29 AU 241
1547	30 AU 242	31 AU 243	1 SE 244	2 SE 245	3 SE 246	4 SE 247	5 SE 248
1548	6 SE 249	7 SE 250	8 SE 251	9 SE 252	10 SE 253	11 SE 254	12 SE 255
1549	13 SE 256	14 SE 257	15 SE 258	16 SE 259	17 SE 260	18 SE 261	19 SE 262
1550	20 SE 263	21 SE 264	22 SE 265	23 SE 266	24 SE 267	25 SE 268	26 SE 269
1551	27 SE 270	28 SE 271	29 SE 272	30 SE 273	1 OC 274	2 OC 275	3 OC 276
1552	4 OC 277	5 OC 278	6 OC 279	7 OC 280	8 OC 281	9 OC 282	10 OC 283
1553	11 OC 284	12 OC 285	13 OC 286	14 OC 287	15 OC 288	16 OC 289	17 OC 290
1554	18 OC 291	19 OC 292	20 OC 293	21 OC 294	22 OC 295	23 OC 296	24 OC 297
1555	25 OC 298	26 OC 299	27 OC 300	28 OC 301	29 OC 302	30 OC 303	31 OC 304
1556	1 NO 305	2 NO 306	3 NO 307	4 NO 308	5 NO 309	6 NO 310	7 NO 311
1557	8 NO 312	9 NO 313	10 NO 314	11 NO 315	12 NO 316	13 NO 317	14 NO 318
1558	15 NO 319	16 NO 320	17 NO 321	18 NO 322	19 NO 323	20 NO 324	21 NO 325
1559	22 NO 326	23 NO 327	24 NO 328	25 NO 329	26 NO 330	27 NO 331	28 NO 332
1560	29 NO 333	30 NO 334	1 DE 335	2 DE 336	3 DE 337	4 DE 338	5 DE 339
1561	6 DE 340	7 DE 341	8 DE 342	9 DE 343	10 DE 344	11 DE 345	12 DE 346
1562	13 DE 347	14 DE 348	15 DE 349	16 DE 350	17 DE 351	18 DE 352	19 DE 353
1563	20 DE 354	21 DE 355	22 DE 356	23 DE 357	24 DE 358	25 DE 359	26 DE 360
1564	27 DE 361	28 DE 362	29 DE 363	30 DE 364	31 DE 365		

# فصل چہارم

## حرکت مداری ماهواره ها

موقعیت لحظه ای دقیق ماهواره ها در فضا تقریباً در تمام مسائل ژئودزی ماهواره ای مورد نیاز است. این موضوع بویژه در تعیین موقعیت دقیق نقاط زمینی بسیار مورد توجه است و دقت موقعیت ماهواره ها نقش اساسی در دستیابی به موقعیت دقیق نقاط زمینی دارند. عامل اصلی حرکت مداری ماهواره‌ها نیروی جاذبه مرکزی زمین تحت قوانین کپلر است. اما حرکت واقعی ماهواره ها علاوه بر نیروی جاذبه مرکزی زمین متأثر از نیروهای دیگری مانند نیروی جاذبه غیر مرکزی زمین، جاذبه خورشید و ماه، جزر و مد زمین و فشار وارد بر ماهواره ها به دلیل تشعشعات خورشیدی به عنوان نیروهای اغتشاشی می‌باشد. البته نیروی اصطکاک اتمسفری را نیز نباید فراموش کرد ولی اثر این نیرو برای ماهواره های با ارتفاع مداری زیاد قابل چشم پوشی است. نیروهای اغتشاشی به دو بخش نیروهای جاذبی و نیروهای غیرجاذبی تقسیم می‌شوند. نیروهای جاذبی شامل: جاذبه غیرکروی زمین، جاذبه ماه، خورشید و سایر سیارات منظومه شمسی، جاذبه جزرومد پوسته‌ای و اقیانوسی و نیروهای غیرجاذبی شامل: اصطکاک اتمسفر، تشعشعات خورشیدی و اثر غیرمستقیم تشعشعات خورشیدی می باشند.

از دیدگاه ریاضی، معادلات حرکت مداری ماهواره‌ها بصورت معادلات دیفرانسیل نوشته می شوند که بوسیله انتگرال گیری عددی نسبت به زمان حل می‌شوند. انتگرال گیری با مقادیر شرطی اولیه، مانند موقعیت و سرعت ماهواره ها در زمان های اولیه، انجام می‌پذیرد. موقعیت‌های محاسبه شده حاصل از انتگرال گیری برای ماهواره ها می‌توانند با مشاهدات واقعی مقایسه شوند و اختلاف های حاصل برای بهبود تابع نیرو، مقادیر شرطی اولیه، یا موقعیت ایستگاه های زمینی مورد استفاده قرار گیرند.

## عناصر کپلری

اغلب برای بیان موقعیت ماهواره‌ها در فضا از ۶ عنصر یا پارامتر کپلری استفاده می‌شود. از آنجا که نیروی جاذبه مرکزی زمین بیشترین نقش را در حرکت مداری ماهواره ها دارد، لذا برای بررسی حرکت ماهواره‌ها از این واقعیت استفاده کرده و به جای مدارات واقعی از مدارهای ساده تری موسوم به مدارهای نرمال استفاده می‌کنیم. در مدارهای نرمال، ماهواره‌ها در یک صفحه مداری حرکت می‌کنند که در فضا ثابت می‌باشد. با این





همانطور که اشاره شد مسیر حرکت ماهواره به دور زمین یک بیضی است که شکل و اندازه آن با نصف قطر بزرگ  $a$  و نصف قطر کوچک  $b$  یا خروج از مرکزی اول  $e$  تعیین می‌شود. مطابق نگاره (۱) برای نمایش مختصات کارتیزین ماهواره در مدار بیضی شکل خود از محورهای قطر بزرگ و قطر کوچک به ترتیب برای  $X$  و  $Y$  استفاده می‌شود که مبدا آن بر نقطه کانونی بیضی و منطبق بر مرکز جرم زمین قرار می‌گیرد. در نگاره فوق پارامتر  $e$  بیانگر خروج از مرکزی اول بیضی،  $f$  زاویه بین محور  $X$  (بطرف نقطه پریجی) و بردار واصل مرکز زمین به ماهواره در جهت خلاف عقربه‌های ساعت موسوم به آنومالی حقیقی،  $E$  زاویه بین محور  $X$  (بطرف نقطه پریجی) و بردار واصل مرکز زمین به تصویر  $S'$  ماهواره (موازی با محور  $Y$  بر روی دایره محیطی به شعاع  $a$ ) در جهت خلاف عقربه‌های ساعت موسوم به آنومالی خارج از مرکزی،  $r$  بردار موقعیت لحظه ای ماهواره و  $\dot{r}$  بردار سرعت یا نرخ لحظه ای موقعیت ماهواره در دستگاه مختصات مداری ماهواره است.

معادله بیضی مداری با توضیحات بالا و در نظر گرفتن محور  $Y'$  موازی با محور  $Y$  و محور  $X'$  موازی با محور  $X$  گذرنده از مرکز بیضی بصورت زیر نوشته می‌شود.

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

که در آن

$$x' = ae + r \cos f \quad (2)$$

$$y' = r \sin f \quad (3)$$

$$b^2 = a^2(1 - e^2) \quad (4)$$

با جایگذاری معادلات (۲)، (۳) و (۴) در (۱) و حل معادله درجه دوم برای  $r$  به رابطه دیگری برای معادله بیضی خواهیم رسید.

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{a(1 - e^2)} + \frac{e}{a(1 - e^2)} \cos f \quad (5)$$

حال با در نظر گرفتن ثابت های  $c = \frac{e}{a(1-e^2)}$  و  $h = \sqrt{GM.a.(1-e^2)}$  به رابطه ساده تری برای معادله

بیضی مسیر ماهواره خواهیم رسید.

$$\frac{1}{r} = c \cdot \cos f + \frac{GM}{h^2} \quad (6)$$

با توجه به نگاره (۱) و توضیحات بالا و معادلات قبلی، بردار موقعیت لحظه ای ماهواره ( $r$ ) و بردار سرعت لحظه ای ماهواره ( $\dot{r}$ ) در دستگاه مختصات مداری به صورت زیر قابل نمایش است. لازم به ذکر است محور  $Z$  عمود بر صفحه مداری است و یک دستگاه مختصات دست راستی فراهم می کند.

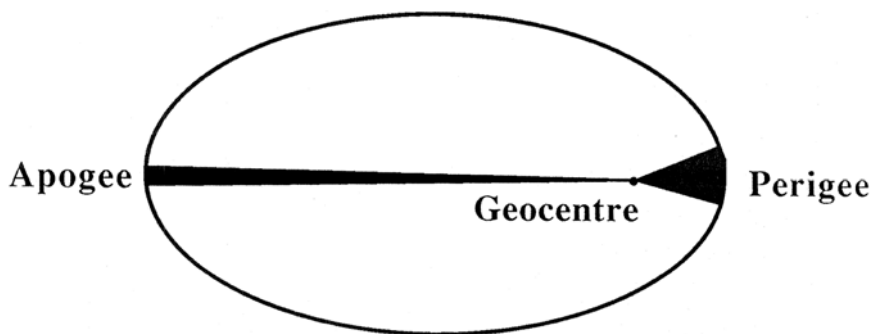
$$r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x' - ae \\ y' \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \cos E - ae \\ a\sqrt{1-e^2} \sin E \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos f \\ r \sin f \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{a(1-e^2)}{(1+e \cos f)} \begin{bmatrix} \cos f \\ \sin f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

$$\dot{r} = \frac{na}{(1-e \cos E)} \begin{bmatrix} -\sin E \\ \sqrt{1-e^2} \cos E \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{na}{\sqrt{1-e^2}} \begin{bmatrix} -\sin f \\ e + \cos f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

که در آن  $n$  سرعت زاویه ای متوسط ماهواره در مدار است و با داشتن دوره تناوب گردش ماهواره به دور زمین ( $T$ ) به صورت زیر بدست می آید.

$$n = \frac{2\pi}{T} \quad (9)$$

**قانون دوم:** در طی حرکت ماهواره به دور زمین، بردار موقعیت ماهواره در زمان های مساوی، مساحت های مساوی جاروب می کند. بنابراین هرگاه اندازه بردار موقعیت ماهواره کوتاه تر شود، سرعت ماهواره بیشتر و هرگاه اندازه بردار موقعیت ماهواره بلند تر شود، سرعت ماهواره کمتر می شود. این قانون به این معنی است که حداکثر سرعت ماهواره در نزدیکترین نقطه بیضی مدار به مرکز زمین یعنی پریجی و حداقل سرعت ماهواره در دورترین نقطه بیضی مدار به مرکز زمین یعنی آپوجی رخ می دهد (نگاره ۲).



نگاره ۲- تعبیر هندسی قانون دوم کپلر [2]

مطابق نگاره (۳) برای یک کمان بسیار کوچک از بیضی مسیر می توان از تقریب دایره به جای بیضی استفاده کرد و مساحت پیموده شده توسط بردار موقعیت ماهواره  $r$  را بین دو لحظه  $t_1$  و  $t_2$  بدست آورد.

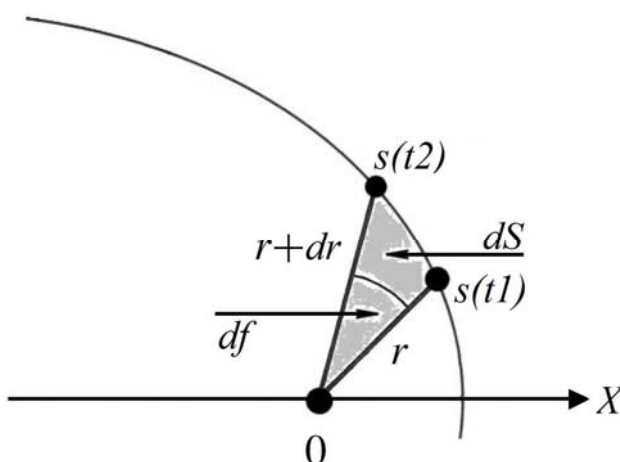
$$dS \approx \frac{1}{2} r^2 df \quad (10)$$

که در آن  $df$  زاویه پیموده شده توسط بردار موقعیت ماهواره  $r$  می باشد. از قانون دوم کپلر می توان رابطه زیر را نتیجه گرفت.

$$r^2 df \approx c \cdot dt \quad (11)$$

که  $c$  ضریب ثابت و  $dt$  فاصله زمانی بین دو موقعیت  $s(t_1)$  و  $s(t_2)$  ماهواره می باشد. نهایتاً معادله ریاضی قانون دوم کپلر را می توان به صورت زیر نمایش داد.

$$r^2 \frac{df}{dt} = c \quad (12)$$



نگاره ۳- حرکت ماهواره تحت قانون دوم کپلر

**قانون سوم:** مکعب نیم قطر بزرگ مدار بیضی ماهواره ( $a$ ) متناسب با مربع دوره تناوب حرکت ماهواره به دور زمین ( $T$ ) است.

$$a^3 \propto T^2 \quad (13)$$

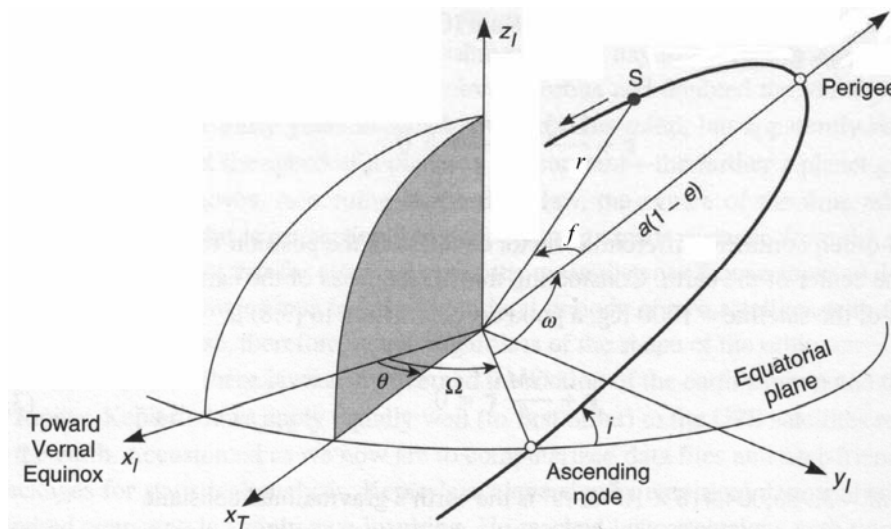
بر اساس مطالعات و تحقیقات به عمل آمده رابطه فوق به صورت زیر تعیین شده است.

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2} \quad (14)$$

که در آن  $G$  ثابت جاذبه زمین و  $M$  جرم زمین است. همچنین با استفاده از قانون سوم کپلر، سرعت زاویه ای متوسط ماهواره ( $n$ ) را می توان به صورت زیر بدست آورد.

$$n = \frac{2\pi}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \quad (15)$$

حال پس از آشنایی با قوانین کپلر به بیان مختصات هر ماهواره در مدار بیضی با استفاده از شش عنصر کپلری می پردازیم. مطابق نگاره (۴) موقعیت لحظه ای هر ماهواره در حال گردش به دور زمین با شش پارامتر زیر موسوم به عناصر یا پارامترهای مداری کپلری قابل بیان است.

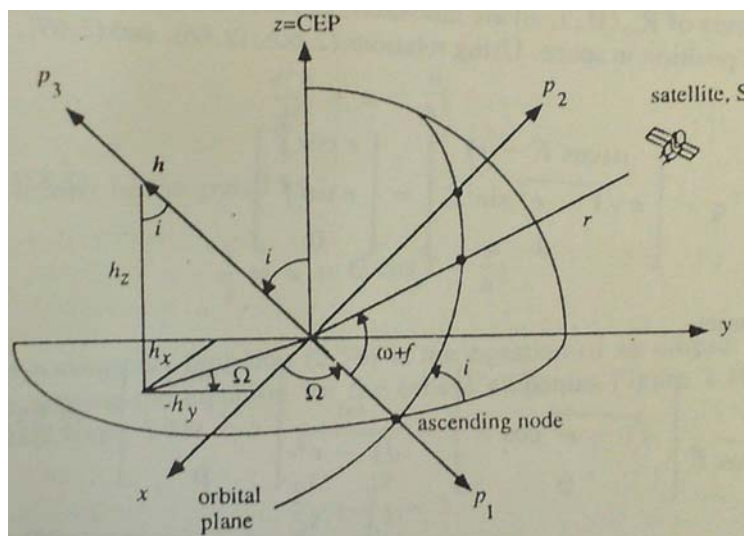


نگاره ۴- پارامترهای مداری کپلری ( $\Omega, i, \omega, a, e, f$ ) در دستگاه مختصات مرجع اینرشیال

- بعد نقطه گرهی صعودی،  $\Omega$ ، که زاویه بین نقطه گرهی صعودی و نقطه اعتدال بهاری (ورنال) در جهت خلاف عقربه‌های ساعت است. صفحه حرکت مداری ماهواره و استوای زمین یکدیگر را در یک خط موسوم به خط نودال با دو نقطه تلاقی بنام نقاط گرهی قطع می‌کنند. نقطه گرهی که از آن به بعد ماهواره وارد فضای نیمکره شمالی می‌شود، نقطه گرهی صعودی و نقطه گرهی که از آن به بعد ماهواره وارد فضای نیمکره جنوبی می‌شود را نقطه گرهی صعودی می‌نامند.
  - زاویه میل،  $i$ ، که زاویه بین صفحه حرکت مداری و صفحه استوا در جهت خلاف عقربه‌های ساعت است.
  - آرگومان پریجی،  $\omega$ ، که زاویه بین نقطه گرهی صعودی و نقطه پریجی در صفحه حرکت مداری در جهت خلاف عقربه‌های ساعت است.
  - نیم قطر بزرگ بیضی مدار ماهواره،  $a$ ، که قطعا بزرگتر از نیم قطر بزرگ بیضی مرجع زمین است.
  - خروج از مرکزی اول بیضی مدار ماهواره،  $e$ ، که عددی بسیار کوچک است و بیانگر انحراف جزئی بیضی مدار ماهواره از یک دایره است.
  - یک پارامتر دیگر به صورت تابعی از زمان مانند آنومالی حقیقی ( $f$ )، آنومالی خارج از مرکزی ( $E$ ) یا آنومالی متوسط ( $M$ ) که نشاندهنده موقعیت لحظه ای ماهواره در مدار بیضی شکل خود باشد.
- از بین پارامترهای فوق بعد نقطه گرهی صعودی و زاویه میل ( $\Omega, i$ ) نشاندهنده موقعیت صفحه حرکت مداری در یک فضای اینرشیال یا دستگاه مرجع سماوی، آرگومان پریجی ( $\omega$ ) بیانگر توجیه بیضی مدار ماهواره در صفحه حرکت مداری، نیم قطر بزرگ و خروج از مرکزی اول بیضی مدار ماهواره و آنومالی حقیقی ( $a, e, f$ ) نشاندهنده موقعیت لحظه ای ماهواره در بیضی مدار است. پنج پارامتر اول در فضای اینرشیال ثابت هستند ولی پارامتر ششم یعنی آنومالی حقیقی ( $f$ )، آنومالی خارج از مرکزی ( $E$ ) یا آنومالی متوسط ( $M$ ) تنها پارامتر کپلری است که به عنوان تابعی از حرکت ماهواره یا به عبارت دیگر تابعی از زمان مطرح است. البته یادآوری می‌شود در بررسی مسیر واقعی ماهواره‌ها، شرایط حرکت کپلری و مدارهای نرمال برقرار نیست و تمام پارامترهای کپلری بصورت تابعی از زمان در نظر گرفته می‌شوند. بهر حال بنابر آنچه دیدیم با فرض

حرکت کپلری، برای دانستن مختصات ماهواره در یک دستگاه مختصات مرجع سماوی هر شش پارامتر یاد شده ضروری می باشند.

هر چند می توان موقعیت هر ماهواره را با دسته های مختلفی از عناصر کپلری مانند  $(\Omega, i, \omega, a, e, f)$ ،  $(\Omega, i, \omega, a, e, E)$  یا  $(\Omega, i, \omega, a, e, M)$  مشخص نمود، لیکن اغلب اوقات موقعیت ماهواره با عناصر کپلری مشخص نمی شود و به جای آن از بردار موقعیت  $r_{RA} = (x, y, z)_{RA}$  و بردار سرعت  $\dot{r}_{RA} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})_{RA}$  در دستگاه مختصات سماوی، استفاده می شود (نگاره های ۴ و ۵).



نگاره ۵- عناصر کپلری و بردار گشتاور زاویه ای در دستگاه مختصات سماوی (leick)

برای تبدیل بردار مختصات و سرعت ماهواره از دستگاه مختصات مداری  $(r_{OR}, \dot{r}_{OR})$  به دستگاه مختصات سماوی بعدی  $(r_{RA}, \dot{r}_{RA})$  به عنوان یک دستگاه مختصات اینرشیال از سه پارامتر مداری کپلری  $(\Omega, i, \omega)$  که دارای مقادیر ثابت هستند و ماتریس های دوران  $R_Z$  و  $R_X$  حول محور های  $X$  و  $Z$  استفاده می شود.

$$\begin{aligned} r_{RA} &= R_Z(-\Omega)R_X(-i)R_Z(-\omega)r_{OR} \\ \dot{r}_{RA} &= R_Z(-\Omega)R_X(-i)R_Z(-\omega)\dot{r}_{OR} \end{aligned} \quad (16)$$

که در آن  $R_X$  و  $R_Z$  معرف دوران حول محور های  $X$  و  $Z$  می باشند.

همچنین در صورت نیاز به محاسبه پارامترهای کپلری به کمک بردار مختصات سماوی، بایستی ابتدا مقدار و جهت بردار گشتاور زاویه ای را که عمود بر صفحه حرکت مداری است بدست آوریم.

$$h = r_{RA} \times \dot{r}_{RA} = \begin{bmatrix} h_x \\ h_y \\ h_z \end{bmatrix} \quad (17)$$

حال بر اساس نگاره (۵) با روابط زیر می توان دو پارامتر بعد نقطه گرهی صعودی و زاویه میل  $(\Omega, i)$  را بدست آورد.

$$\Omega = \tan^{-1} \left( \frac{h_x}{-h_y} \right) \quad (18)$$

$$i = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{h_x^2 + h_y^2}}{h_z} \right) \quad (19)$$

با تعریف یک دستگاه مختصات کمکی مانند  $p$ ، که محور  $p1$  آن منطبق بر خط نودال، محور  $p3$  آن در راستای بردار گشتاور زاویه ای و محور  $p2$  آن برای ما یک دستگاه مختصات دست راستی فراهم نماید، به تبدیل بین دستگاه مختصات سماوی و کمکی به صورت زیر می رسیم.

$$p = R_x(i)R_z(\Omega)r_{RA} \quad (20)$$

حال امکان محاسبه مجموع آرگومان پریجی و آنومالی حقیقی از رابطه زیر فراهم شده است.

$$\omega + f = \tan^{-1} \left( \frac{p2}{p1} \right) \quad (21)$$

مقادیر سرعت ماهواره، فاصله ماهواره از مرکز جرم زمین و گشتاور زاویه ای در دستگاه مختصات سماوی به ترتیب از روابط زیر تعیین می شوند.

$$\dot{r} = \sqrt{\dot{r}_{RA} \cdot \dot{r}_{RA}} = \|\dot{r}_{RA}\| \quad (22)$$

$$r = \sqrt{r_{RA} \cdot r_{RA}} = \|r_{RA}\| \quad (23)$$

$$h = \sqrt{h \cdot h} = \|h\| \quad (24)$$

مقدار سرعت همچنین در دستگاه مختصات مداری قائم الزاویه به صورت زیر نیز قابل تعیین است.



$$\begin{aligned} \dot{r}^2 &= x^2 + y^2 & (25) \\ &= \frac{n^2 a^2}{1-e^2} (\sin^2 f + e^2 + 2e \cos f + \cos^2 f) \\ &= \frac{GM}{a(1-e^2)} (2 + 2e \cos f - (1-e^2)) \\ &= GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right) \end{aligned}$$

به کمک معادله فوق می توان مقدار نیم قطر بزرگ بیضی مدار ماهواره را بدست آورد.

$$a = \frac{r}{2 - r(\dot{r}^2/GM)} \quad (26)$$

از رابطه  $h$  نیز که قبلا در معادله (۶) بکار رفته است، می توان مقدار خروج از مرکزی اول بیضی مسیر ماهواره را به صورت زیر محاسبه نمود.

$$e = \sqrt{\left(1 - \frac{h^2}{a.GM}\right)} \quad (27)$$

همچنین بر اساس روابط (۷) و (۸) می توان آنومالی خارج از مرکزی  $E$  را نیز بدست آورد.

$$\begin{aligned} \cos E &= \frac{a-r}{ae} & (28) \\ \sin E &= \frac{r.\dot{r}}{e\sqrt{a.GM}} \end{aligned}$$

با داشتن آنومالی خارج از مرکزی  $E$  می توان به محاسبه آنومالی حقیقی  $f$  پرداخت.

$$f = \tan^{-1} \left( \frac{\sqrt{1-e^2} \sin E}{\cos E - e} \right) \quad (29)$$

نهایتا بر اساس معادله کپلر که برای اثبات قانون سوم کپلر بدست آمده است به رابطه تعیین مقدار آنومالی متوسط  $M$  می رسیم.

$$M = E - e \sin E \quad (30)$$

از آنجا که در نهایت باید مختصات لحظه ای ماهواره ها را در دستگاه مختصات زمینی بدانیم، لذا تبدیل بین دستگاه های مختصات سماوی و زمینی ضروری است. برای تبدیل بردار مختصات و سرعت از دستگاه مختصات سماوی بعدی  $(r_{RA}, \dot{r}_{RA})$  به دستگاه مختصات زمینی قراردادی  $(r_{CT}, \dot{r}_{CT})$  از پارامترهای توجیه زمین  $(x_p, y_p, GAST = \theta)$  و ماتریس های دوران  $R_X, R_Y, R_Z$  حول محور های  $X, Y, Z$  استفاده می شود.

$$\begin{aligned} r_{CT} &= R_Y(-x_p)R_X(-y_p)R_Z(\theta)r_{RA} \\ \dot{r}_{CT} &= R_Y(-x_p)\dot{R}_X(-y_p)\dot{R}_Z(\theta)\dot{r}_{RA} \end{aligned} \quad (31)$$

### تئوری مدارهای نرمال

مدارهای نرمال بطور مشخص برای درک و تصور حرکت های فضایی ماهواره ها بسیار مفید هستند و در آنها جواب های معادلات حرکت ماهواره ها بطور ساده بصورت معادلات تحلیلی ارائه می شوند. از آنجایی که مدارهای نرمال تنها بصورت تابعی از بخش مرکزی میدان جاذبه زمین (مهمترین نیروی اثر گذار بر روی حرکت ماهواره ها) در نظر گرفته می شوند، فقط برای پیش بینی های مداری کوتاه مدت با دقت های پایین قابل استفاده می باشند. به عنوان مثال استفاده از مدارهای نرمال برای تشخیص ماهواره های موجود در افق محلی و برنامه ریزی برای اجرای یک عملیات اندازه گیری با GPS بسیار مناسب می باشد.

بر اساس فرضیاتی که در بخش قبل به آنها اشاره شد، حرکت نرمال یا همان حرکت کپلری ماهواره ها بطور کامل با قانون جاذبه عمومی نیوتن تعریف می شود.

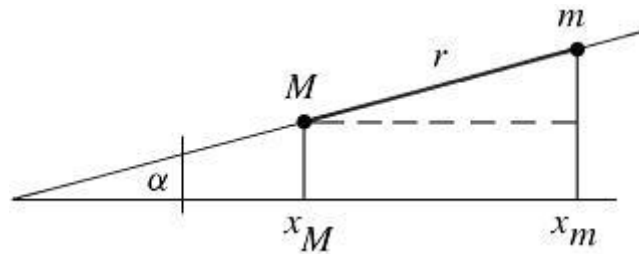
$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (32)$$

که در آن  $F$  نیروی جاذبه بین زمین و ماهواره،  $G$  ثابت جهانی جاذبه،  $M$  جرم زمین و اتمسفر آن،  $m$  جرم ماهواره و  $r$  فاصله بین مرکز جرم زمین و مرکز جرم ماهواره است. این نیرو همچنین می تواند بر اساس قانون دوم نیوتن بصورت زیر بر اساس شتاب ماهواره  $(\ddot{r})$  نیز نوشته شود.

$$F = m\ddot{r} \quad (33)$$

با توجه به فرض نیروی جاذبه مرکزی برای زمین، بردارهای شتاب و موقعیت هم راستا هستند و خطوط شاقولی کاملاً مستقیم و به سمت مرکز زمین می باشند. با فرض وجود زوایای  $\alpha$ ،  $\beta$  و  $\gamma$  بین راستای نیرو و محورهای مختصات  $X$ ،  $Y$  و  $Z$  در یک دستگاه مختصات کارتزین سه بعدی، می توان تصویر بردار نیروی بین ماهواره و زمین را بر روی هر محور بدست آورد. در حالتی که حرکت زمین ( $M$ ) را نسبت به ماهواره ( $m$ ) در نظر بگیریم، تصویر نیروی مذکور بر روی محور  $X$  به صورت زیر خواهد بود (نگاره ۶).

$$M \cdot \ddot{x}_M = F_x = F \cdot \cos \alpha = -G \frac{Mm}{r^2} \cos \alpha = G \frac{Mm}{r^3} (x_m - x_M) \quad (34)$$



نگاره ۶- تصویر معادله حرکت نیوتن بر روی محور  $X$

به همین ترتیب تصویر نیرو بر روی محورهای  $Y$  و  $Z$  هم به صورت زیر بدست می آیند.

$$M \cdot \ddot{y}_M = G \frac{Mm}{r^3} (y_m - y_M) \quad (35)$$

$$M \cdot \ddot{z}_M = G \frac{Mm}{r^3} (z_m - z_M) \quad (36)$$

حال چنانچه حرکت ماهواره ( $m$ ) نسبت به زمین ( $M$ ) مد نظر باشد، در آن صورت سه معادله فوق به صورت زیر بدست خواهند آمد.

$$m \cdot \ddot{x}_m = -G \frac{Mm}{r^3} (x_m - x_M) \quad (37)$$

$$m \cdot \ddot{y}_m = -G \frac{Mm}{r^3} (y_m - y_M) \quad (38)$$

$$m \cdot \ddot{z}_m = -G \frac{Mm}{r^3} (z_m - z_M) \quad (39)$$