

با انتقال مبدا مختصات به مرکز جرم زمین می توانیم از ساده سازی های زیر استفاده نماییم.

$$x_m - x_M = x; \quad y_m - y_M = y; \quad z_m - z_M = z$$

با تقسیم معادلات (۳۴) تا (۳۶) بر M و معادلات (۳۷) تا (۳۹) بر m و کم کردن آنها از یکدیگر به معادلات زیر می رسیم.

$$\ddot{x} = -G(M+m)\frac{x}{r^3}, \quad \ddot{y} = -G(M+m)\frac{y}{r^3}, \quad \ddot{z} = -G(M+m)\frac{z}{r^3} \quad (40)$$

که در آن $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$. فرم برداری دسته معادلات (۴۰) بصورت زیر خواهد بود.

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -G \frac{M+m}{r^3} \mathbf{r} \quad (41)$$

از آنجا که جرم ماهواره (m) در مقابل جرم زمین (M) بسیار ناچیز است، می توان از آن چشم پوشی کرد و معادله (۴۱) را به شکل زیر بازنویسی نمود.

$$\ddot{\mathbf{r}} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{GM}{r^3} \mathbf{r} \quad (42)$$

از دیدگاه ریاضی معادله اخیر یک معادله دیفرانسیل مرتبه دوم با شش ثابت انتگرال گیری است (دو ثابت برای هر مولفه). به عبارت دیگر معادله حرکت هر ماهواره به دور زمین دارای شش پارامتر مستقل است که همان پارامترهای کپلری هستند.

با ضرب دسته معادلات (۴۰) در x ، y و z و کم کردن دو به دوی آنها از یکدیگر به معادلات دیفرانسیل مرتبه دوم زیر خواهیم رسید.

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0, \quad y\ddot{z} - z\ddot{y} = 0, \quad z\ddot{x} - x\ddot{z} = 0 \quad (43)$$

با انتگرال گیری از معادلات فوق به معادلات دیفرانسیل مرتبه اول زیر خواهیم رسید.

$$x\dot{y} - y\dot{x} = C_1, \quad y\dot{z} - z\dot{y} = C_2, \quad z\dot{x} - x\dot{z} = C_3 \quad (44)$$

که در آنها C_1 ، C_2 و C_3 ثابت های دلخواه هستند. با ضرب معادلات فوق به ترتیب در z ، x و y و جمع کردن آنها به معادله ساده زیر خواهیم رسید.

$$C_1 z + C_2 x + C_3 y = 0 \quad (45)$$

همانطور که پیداست معادله فوق بیانگر معادله یک صفحه شامل مبدا مختصات است. این موضوع بدین معنی است که حرکت ماهواره به دور زمین در یک صفحه گذرنده از مرکز جرم زمین صورت می گیرد. توجیه هر صفحه مداری در فضا با دو پارامتر مانند بعد نقطه گرهی صعودی و زاویه میل (Ω, i) تعیین می گردد. ارتباط بین ثابت های C_1 ، C_2 و C_3 و دو پارامتر بعد نقطه گرهی صعودی و زاویه میل (Ω, i) به صورت زیر بدست آمده است [3].

$$\frac{C_1}{N} = \cos i, \quad \frac{C_2}{N} = \sin \Omega \sin i, \quad \frac{C_3}{N} = -\cos \Omega \sin i \quad (46)$$

که در آن $N = \sqrt{C_1^2 + C_2^2 + C_3^2}$ و قائم بر صفحه مداری ماهواره است.

برای اثبات بیضی بودن مسیر ماهواره، مجدداً معادلات (40) را در نظر بگیرید و آنها را به ترتیب در $2\dot{x}$ و $2\dot{y}$ ضرب نمایید. نتیجه اینکار به صورت زیر قابل بیان است.

$$\ddot{x}2\dot{x} = -GM \frac{x}{r^3} 2\dot{x}, \quad \ddot{y}2\dot{y} = -GM \frac{y}{r^3} 2\dot{y} \quad (47)$$

با جمع کردن روابط فوق به رابطه جدید زیر می رسیم.

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = -\frac{2GM}{r^3}(x\dot{x} + y\dot{y}) \quad (48)$$

از آنجا که $r^2 = x^2 + y^2$ و $2r\dot{r} = 2x\dot{x} + 2y\dot{y}$ ، لذا رابطه بالا را می توان به صورت زیر نمایش داد.

$$\frac{d}{dt}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = -\frac{2GM}{r^2}\dot{r} = 2GM \frac{\dot{r}}{r} \quad (49)$$

پس از انتگرال گیری از (49) به رابطه زیر می رسیم.

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 2\frac{GM}{r} + p_3 \quad (50)$$

با نمایش متغیرها در دستگاه مختصات قطبی مدار حرکت ماهواره به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{f}^2 = 2\frac{GM}{r} + p_3 \quad (51)$$

جواب چنین معادله دیفرانسیلی می تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos f} \quad (52)$$

با مقایسه رابطه (۵۲) با رابطه (۵) در می یابیم که همان معادله بیضی مسیر ماهواره است.

روش دیگر برای اثبات قانون اول کپلر به صورت زیر است که در ادامه توضیح داده می شود. بر اساس نگاره

(۱) مجددا بردار موقعیت ماهواره را در سیستم مختصات مداری قائم الزاویه بصورت زیر می نویسیم.

$$r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \cos f \\ r \sin f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (53)$$

فاصله زمین مرکز و آنومالی حقیقی ماهواره بصورت توابعی از زمان معرفی می شوند. بنابراین مشتق بردار

موقعیت ماهواره نسبت به زمان که همان بردار سرعت ماهواره است بصورت زیر بدست می آید.

$$\dot{r} = \dot{r} \begin{bmatrix} \cos f \\ \sin f \\ 0 \end{bmatrix} + r \dot{f} \begin{bmatrix} -\sin f \\ \cos f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (54)$$

مشتق مرتبه دوم بردار موقعیت ماهواره نسبت به زمان نیز به عنوان بردار شتاب ماهواره بصورت زیر بدست

می آید.

$$\ddot{r} = \ddot{r} \begin{bmatrix} \cos f \\ \sin f \\ 0 \end{bmatrix} + 2\dot{r}\dot{f} \begin{bmatrix} -\sin f \\ \cos f \\ 0 \end{bmatrix} + r\ddot{f} \begin{bmatrix} -\sin f \\ \cos f \\ 0 \end{bmatrix} - r\dot{f}^2 \begin{bmatrix} \cos f \\ \sin f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (55)$$

از طرفی با در نظر گرفتن روابط (۴۲) و (۵۳) مشتق مرتبه دوم بردار موقعیت ماهواره نسبت به زمان

بصورت زیر نیز قابل بیان است.

$$\ddot{r} = \frac{-GM}{r^2} \begin{bmatrix} \cos f \\ \sin f \\ 0 \end{bmatrix} \quad (56)$$

با مساوی قراردادن روابط (۵۵) و (۵۶) به ازای $f = 0$ به روابط زیر می رسیم.

$$\ddot{r} - r\dot{f}^2 = \frac{-GM}{r^2} \quad (57)$$

$$r\ddot{f} - 2\dot{r}\dot{f} = 0 \quad (58)$$

با ضرب رابطه (۵۸) در r و انتگرال گیری از آن به رابطه جدید زیر خواهیم رسید.

$$\int (r^2 \ddot{f} - 2r\dot{r}\dot{f}) dt = c \quad (59)$$

نتیجه انتگرال گیری بالا بصورت زیر قابل نمایش می باشد.

$$r^2 \dot{f} = r^2 \frac{df}{dt} = h \quad (60)$$

که در آن h یک ثابت جدید است. معادله (60) بعنوان معادله گشتاور زاویه‌ای معروف است و برای حرکت مداری ماهواره دارای مقداری ثابت می باشد. برای انتگرال گیری از رابطه (57)، یک متغیر جدید به صورت زیر تعریف می کنیم.

$$u = \frac{1}{r} \quad (61)$$

با استفاده از معادله (60) رابطه $\frac{dt}{df}$ بر حسب r و h قابل تعیین است و بنابراین براساس قاعده زنجیره ای می توان به معادله زیر رسید.

$$\frac{du}{df} = \frac{du}{dr} \frac{dr}{dt} \frac{dt}{df} = -\frac{\dot{r}}{h} \quad (62)$$

با دیفرانسیل گیری مجدد از رابطه فوق به معادله دیفرانسیل زیر می رسیم.

$$\frac{d^2u}{df^2} = \frac{d}{dr} \left(-\frac{\dot{r}}{h} \right) \frac{dt}{df} = -\frac{\ddot{r}}{u^2 h^2} \quad (63)$$

به طور هم ارز می توان رابطه زیر را به جای رابطه (63) در نظر گرفت.

$$\ddot{r} = -u^2 h^2 \frac{d^2u}{df^2} \quad (64)$$

حال با جایگذاری \ddot{r} از (64) و \dot{f} از (60) در رابطه (57) و تعویض r با u بر اساس (61)، معادله (57) بصورت زیر بازنویسی می شود.

$$\frac{d^2u}{df^2} + u = \frac{GM}{h^2} \quad (65)$$

با انتگرال گیری از رابطه فوق می توان به معادله زیر رسید.

$$\frac{1}{r} = u = c \cdot \cos f + \frac{GM}{h^2} \quad (66)$$

که c یک مقدار ثابت است. با مقایسه رابطه فوق با رابطه (۶) در می یابیم که معادله یک بیضی است. بنابراین این معادله بیانگر قانون اول کپلر می باشد که ناظر بر مدار بیضی شکل حرکت ماهواره به دور زمین و انطباق یکی از کانون های بیضی بر مرکز جرم زمین است.

برای اثبات قانون مساحت با توجه به اینکه حرکت مداری ماهواره در یک صفحه انجام می گیرد، از دستگاه مختصات دو بعدی مداری که مبدا آن منطبق بر مرکز جرم زمین است (نگاره ۱) استفاده کرده و معادله (۴۲) را برای مولفه های x و y مداری به شرح زیر بازنویسی می کنیم [3].

$$\ddot{x} = -\frac{GM}{r^3}x; \quad \ddot{y} = -\frac{GM}{r^3}y \quad (۶۷)$$

که در آن $r^2 = x^2 + y^2$. با ضرب معادلات فوق به ترتیب در y و x و کم کردن آنها از یکدیگر به معادله جدید زیر می رسیم.

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = 0 \quad (۶۸)$$

بعد از انتگرال گیری از آن به رابطه زیر می رسیم.

$$x\dot{y} - y\dot{x} = p1 \quad (۶۹)$$

با جایگذاری مختصات قطبی $x = r \cos f$ و $y = r \sin f$ در رابطه فوق به شکل دیگری از معادله (۶۹) دست می یابیم.

$$r^2 \dot{f} = p1 \quad (۷۰)$$

با در نظر گرفتن این نکته که در طی یک زمان بسیار کوتاه مانند dt بردار موقعیت ماهواره r یک مساحت بسیار کوچک مانند dS را جاروب می کند، رابطه دیفرانسیلی زیر را برای آن می توانیم بنویسیم.

$$dS = \frac{1}{2} r^2 \dot{f} . dt \quad (۷۱)$$

و سپس با در نظر گرفتن (۷۰) می توان آن را به صورت زیر بازنویسی نمود.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{f} = \frac{1}{2} p1 \quad (۷۲)$$

بنابراین با انتگرال گیری از رابطه بالا به رابطه جدیدی برای بیان قانون مساحت خواهیم رسید.

$$S = \frac{1}{2} p1.t + p2 \quad (۷۳)$$

صورت دیگری از اثبات قانون دوم کپلر (قانون مساحت) بکارگیری معادله (۷۲) و جایگذاری $\frac{h}{r^2}$ به جای \dot{f}

می باشد (leick). رابطه زیر نشاندهنده ثابت بودن مساحت طی شده در زمان های مساوی است.

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \cdot \frac{h}{r^2} = \frac{1}{2} h = \frac{1}{2} \sqrt{GM \cdot a \cdot (1 - e^2)} \quad (74)$$

برای اثبات قانون سوم از مفهوم آنومالی خروج از مرکزی E که در نگاره (۱) مشخص است، استفاده می کنیم.

$$x = x' - ae = a(\cos E - e), \quad x' = a \cos E \quad (75)$$

$$y = y' = \sqrt{\left(1 - \frac{x'^2}{a^2}\right)} b^2 = b \sin E \quad (76)$$

از طرفی فاصله زمین مرکز ماهواره به صورت زیر معرفی می شود.

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = a(1 - e \cos E) \quad (77)$$

با دیفرانسیل گیری از روابط (۵) و (۷۷) به روابط زیر می رسیم.

$$dr = a \cdot e \cdot \sin E \cdot dE, \quad dr = \frac{r^2 e}{a(1 - e^2)} \sin f \cdot df \quad (78)$$

حال با مساوی قرار دادن آنها و توجه به روابط (۳)، (۴)، (۵۶) و (۷۶) و ضرب طرفین در r به رابطه زیر خواهیم رسید.

$$r \cdot b \cdot dE = r^2 df \quad (79)$$

با استفاده از روابط (۴) و (۷۷) و جایگذاری پارامترهای کپلری برای r و b و تعویض df با dt بر اساس معادله (۶۰)، از طرفین رابطه فوق انتگرال گیری می کنیم.

$$\int_{E=0}^E (1 - e \cos E) dE = \int_{t_0}^t \sqrt{\frac{GM}{a^3}} dt \quad (80)$$

نتیجه انتگرال گیری از طرفین معادله فوق به صورت زیر خواهد بود.

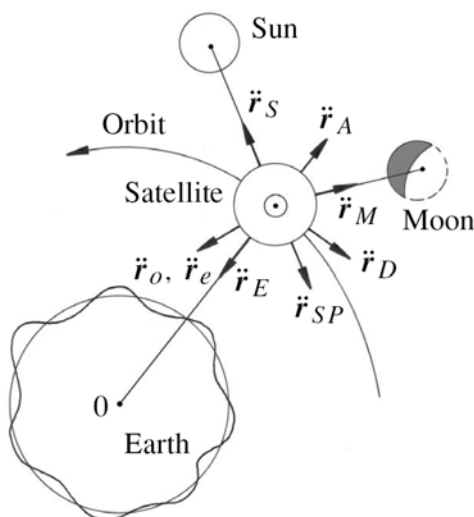
$$E - e \sin E = M \quad (81)$$

$$M = n(t - t_0), \quad n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}} \quad (82)$$

که در آن $n = \sqrt{\frac{GM}{a^3}}$ بیانگر قانون سوم کپلر و $M = E - e \sin E$ معروف به معادله کپلر می باشد. نماد n معرف حرکت متوسط یا همان سرعت زاویه ای متوسط، M آنومالی متوسط و t_0 زمان عبور ماهواره از نقطه پریجی است. باید توجه نمود که آنومالی متوسط M با نماد جرم زمین اشتباه نشود. از آنجا که ضریب GM برای زمین ثابت است، لذا در می یابیم که فقط نیم قطر بزرگ بیضی مدار ماهواره در حرکت متوسط ماهواره (n) و بنابراین در دوره تناوب مداری ماهواره (T) تعیین کننده است.

حرکت اغتشاشی ماهواره

همانطور که قبلا نیز اشاره شد به دلیل وجود سایر نیروهای اثر گذار بر حرکت مداری ماهواره هیچیک از پارامترهای کپلری ماهواره ثابت نیستند و در محاسبه دقیق موقعیت‌های آن بایستی نیروهای اعوجاج دهنده در نظر گرفته شوند. نیروهای اعوجاج دهنده یا همان نیروهای اغتشاشی، نیروهایی هستند که باعث انحراف ماهواره از مسیر ساده نرمال خود می شوند. انحراف در مدار نرمال توسط غیرکروی بودن میدان جاذبه زمین، وجود جاذبه خورشید و ماه و سایر اجرام، فشار تشعشعات خورشیدی، نیروهای جزرومدی و کشش اصطکاک اتمسفری بوجود می آید. هر چه ارتفاع مداری ماهواره‌ها پایین تر باشد اثر نیروهای اغتشاشی بر حرکت مداری آنها بیشتر مشاهده می شود (نگاره ۷).



نگاره ۷- نیروهای اغتشاشی وارد بر ماهواره

معادلات حرکت مداری ماهواره در یک دستگاه مختصات اینرشیال برای یک مبدا زمانی معین که شرط های اولیه داده شده اند، نوشته می شوند. شرط های اولیه در یک مبدا زمانی معین، یا (r, \dot{r}) یا عناصر کپلری هستند. بخاطر وجود نیروهای اغتشاشی تمام عناصر کپلری به صورت تابعی از زمان در نظر گرفته می شوند. در صورت نیاز تبدیل از شروط اولیه (r, \dot{r}) به عناصر کپلری و برعکس مطابق روابط داده شده در بخش قبلی امکان پذیر است. معادلات حرکت در دستگاه مختصات کارتیزین بصورت زیر نوشته می شوند.

$$\frac{dr}{dt} = \dot{r} \quad (83)$$

$$\frac{d\dot{r}}{dt} = -\frac{GM \cdot r}{r^3} + \ddot{r}_g + \ddot{r}_s + \ddot{r}_m + \ddot{r}_{SRP} \quad (84)$$

دو معادله برداری فوق در واقع شش معادله دیفرانسیل مرتبه اول هستند. عبارت اول در معادله (84) بیانگر شتاب حاصل از میدان جاذبه مرکزی زمین است که مدارهای نرمال را تولید می کند و در بخش قبلی مورد بحث قرار گرفت. در مقایسه با (42) در می یابیم که عبارت های جدید در (84) بیانگر شتاب های حاصل از نیروهای اغتشاشی هستند. ساده ترین روش برای حل معادلات (83) و (84) انتگرال گیری عددی که در اغلب بسته های نرم افزارهای تخصصی مهندسی یا ریاضیات یافت می شود.

میدان جاذبه زمین

شتاب جاذبی مربوط به بخش غیرمرکزی میدان ثقل زمین به صورت زیر قابل ارائه است.

$$\ddot{r}_g = \begin{bmatrix} \partial R / \partial x \\ \partial R / \partial y \\ \partial R / \partial z \end{bmatrix} \quad (85)$$

که در آن R پتانسیل اغتشاشی است و با بسط هارمونیک کروی نمایش داده می شود.

$$R = \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{m=0}^n \frac{GM \cdot a_e^n}{r^{n+1}} \bar{P}_{nm}(\cos \theta) (\bar{C}_{nm} \cos m\lambda + \bar{S}_{nm} \sin m\lambda) \quad (86)$$

$$P_{nm}(\cos \theta) = \frac{(1 - \cos^2 \theta)^{m/2}}{2^n n!} \cdot \frac{d^{(n+m)}}{d(\cos \theta)^{(n+m)}} (\cos^2 \theta - 1)^n \quad (87)$$

$$\bar{P}_n = \sqrt{2n+1} P_n \quad (88)$$

$$\bar{P}_{nm} = \frac{1}{\sqrt{\frac{(n+m)!}{2(2n+1)(n-m)!}}} P_{nm} \quad (89)$$

$$r = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = R_z(-GAST) \begin{bmatrix} r \sin \theta \cos \lambda \\ r \sin \theta \sin \lambda \\ r \cos \theta \end{bmatrix} \quad (90)$$

در روابط فوق a_e شعاع متوسط زمین، r بردار موقعیت زمین مرکز ماهواره، θ و λ به ترتیب عرض زمین مرکز و طول ژئودتیک ماهواره در دستگاه مختصات زمینی هستند. همچنین \bar{P}_{nm} توابع وابسته لژاندر، \bar{S}_{nm} و ضرایب هارمونیک های کروی نرمال از درجه n و مرتبه m هستند. باید توجه نمود که n از 2 شروع می شود و $n=0$ معادل پتانسیل برای مولفه مرکزی میدان جاذبه زمین است.

می توان نشان داد که پتانسیل در حالت $n=1$ برای دستگاه مختصاتی که مبدا آن منطبق بر مرکز زمین است، مساوی صفر است. معادله (87) نشان می دهد که پتانسیل اغتشاشی به صورت نمایی با توان n کاهش می یابد. بزرگترین ضریب در معادله (87) \bar{C}_{20} است که بیانگر فشردگی دینامیکی زمین ناشی از انباشت جرم در استوا است. مقدار این ضریب حدود هزار برابر بزرگتر از سایر ضرایب هارمونیک کروی است. امروزه جواب های قابل دسترس برای ضرایب هارمونیک های کروی برای مدل های جاذبی زمین مانند EGM2008 تا درجه (n) و مرتبه (m) ۲۱۵۹ منتشر شده اند، اما فقط درجات و مراتب پایین دارای اهمیت هستند و برای محاسبات مداری ماهواره ها مورد استفاده قرار می گیرند. به عنوان مثال جدول (۱) ضرایب هارمونیک کروی مرتبه و درجه پایین مورد استفاده برای حرکت مداری ماهواره های GPS را نشان می دهد.

جدول ۱- ضرایب هارمونیک کروی درجه و مرتبه پایین برای ماهواره های GPS

Degree and order		Normalized gravitational coefficients		Degree and order		Normalized gravitational coefficients	
<i>n</i>	<i>m</i>	$\bar{C}_{n,m}$	$\bar{S}_{n,m}$	<i>n</i>	<i>m</i>	$\bar{C}_{n,m}$	$\bar{S}_{n,m}$
2	0	-0.48416685E-03	-----	6	3	0.53370577E-07	0.61334720E-08
2	1	-----	-----	6	4	0.88694856E-07	-0.47260945E-06
2	2	0.24395796E-05	-0.13979548E-05	6	5	-0.26818820E-06	-0.53491073E-06
3	0	0.95706390E-06	-----	6	6	0.10237832E-07	-0.23741002E-06
3	1	0.20318729E-05	0.25085759E-06	7	0	0.85819217E-07	0.94231346E-07
3	2	0.90666113E-06	-0.62102428E-06	7	1	0.27905196E-06	0.88835092E-07
3	3	0.7170352E-06	0.14152388E-05	7	2	0.32873832E-06	0.88835092E-07
4	0	0.53699587E-06	-----	7	3	0.24940240E-06	-0.21223369E-06
4	1	-0.53548044E-06	-0.47420394E-06	7	4	-0.27123034E-06	-0.12696607E-06
4	2	0.34797519E-06	0.65579158E-06	7	5	0.10246290E-08	0.17321672E-07
4	3	0.99172321E-06	-0.19912491E-06	7	6	-0.35843745E-06	0.15202633E-06
4	4	-0.18686124E-06	0.30953114E-06	7	7	-0.20991457E-08	0.22805664E-07
5	0	0.71092048E-07	-----	8	0	0.42979835E-07	-----
5	1	-0.64185265E-07	-0.92492959E-07	8	1	0.18889342E-07	0.47856967E-07
5	2	0.65184984E-06	-0.32007416E-06	8	2	0.73553952E-07	0.47867693E-07
5	3	-0.44903639E-06	-0.21328272E-06	8	3	-0.12132459E-07	-0.83461853E-07
5	4	-0.29719055E-06	0.53213480E-07	8	4	-0.24208264E-06	0.71603924E-07
5	5	0.17523221E-06	-0.67059456E-06	8	5	-0.24966587E-07	0.87751047E-07
6	0	-0.15064821E-06	-----	8	6	-0.65093424E-07	0.30904202E-06
6	1	-0.74180259E-07	0.32780040E-07	8	7	0.66323292E-07	0.74661766E-07
6	2	0.51824409E-07	-0.35866634E-06	8	8	-0.12372281E-06	0.12210238E-06

شتاب ناشی از خورشید و ماه

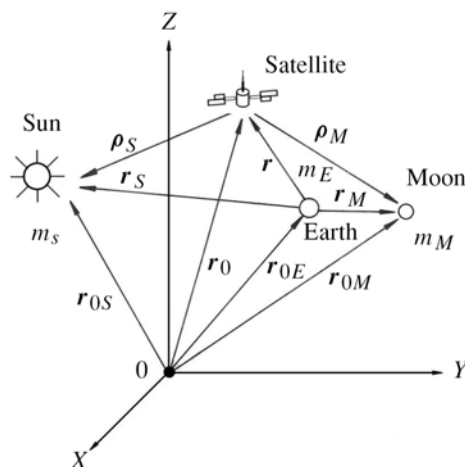
مطابق نگاره (۸) شتاب های ناشی از خورشید و ماه بر روی ماهواره ها به صورت زیر معرفی می شوند.

$$\ddot{r}_m = \frac{GM.m_m}{m_e} \left(\frac{r_m - r}{\|r_m - r\|^3} - \frac{r_m}{\|r_m\|^3} \right) \quad (91)$$

$$\ddot{r}_s = \frac{GM.m_s}{m_e} \left(\frac{r_s - r}{\|r_s - r\|^3} - \frac{r_s}{\|r_s\|^3} \right) \quad (92)$$

که در آن نسبت جرم ها عبارتند از: $m_m/m_e = 0.0123002$ و $m_s/m_e = 332946.0$ و r_m و r_s به

ترتیب بردارهای موقعیت زمین مرکز ماه و خورشید در دستگاه مختصات سماوی هستند.



نگاره ۸- شتاب جاذبی ماه و خورشید بر روی ماهواره

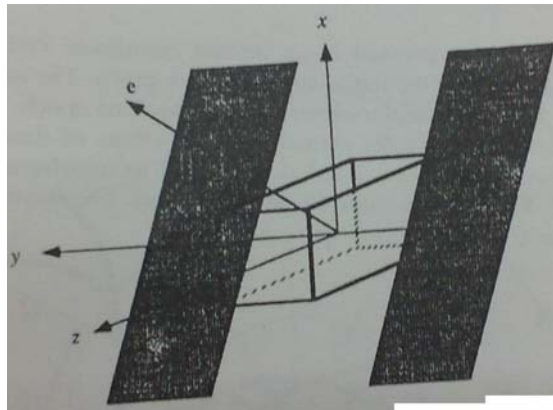
فشار تشعشعات خورشیدی (Solar Radiation Pressure)

فشار تشعشعات خورشیدی ناشی از برخورد فوتون های نوری خورشید روی بدنه ماهواره است. پارامترهای اصلی در محاسبه اثر این شتاب، سطح موثر ماهواره (سطح عمود بر امتداد تابش خورشید)، قابلیت انعکاس سطح، درخشش خورشید و فاصله ماهواره تا خورشید است. محاسبه سطح موثر ماهواره ها به دلیل پیچیدگی شکل آنها کار دشواری است. با این وجود مدل های مختلفی برای برآورد آن و نهایتاً محاسبه فشار تشعشعات خورشیدی ارائه شده است. برای ماهواره هایی که در مناطق سایه قرار می گیرند، فشار تشعشعات خورشیدی صفر می شود. بنابراین در محاسبات دقیق با در نظر گرفتن موقعیت های نسبی خورشید، زمین و ماهواره لازم است منطقه سایه به دقت تعیین شود.

مطابق نگاره (۹)، دستگاه مختصات مورد استفاده برای محاسبه فشار تشعشعات خورشیدی یک دستگاه مختصات محلی بوده که در آن محور z آن در امتداد آنتن ماهواره و به سمت زمین است. محور y آن در راستای محور صفحات خورشیدی ماهواره و محور x آن یک دستگاه دست راستی را کامل می کند. ماهواره ها معمولاً به گونه ای در مسیر مداری خود هدایت می شوند که محور y عمود بر صفحه حاصل از زمین، خورشید و ماهواره باشد. صفحات خورشیدی نیز به منظور عمود بودن بر امتداد تابش خورشید حول محور y دوران می کنند. امتداد تابش خورشید در نگاره (۹) با محور e نمایش داده شده است. یکی از ساده ترین مدل ها برای تخمین فشار تشعشعات خورشیدی به صورت زیر ارائه شده است.

$$r_{SRP} = -p \frac{r_s - r}{\|r_s - r\|} + Y \frac{r_s \times r}{\|r_s \times r\|} \quad (93)$$

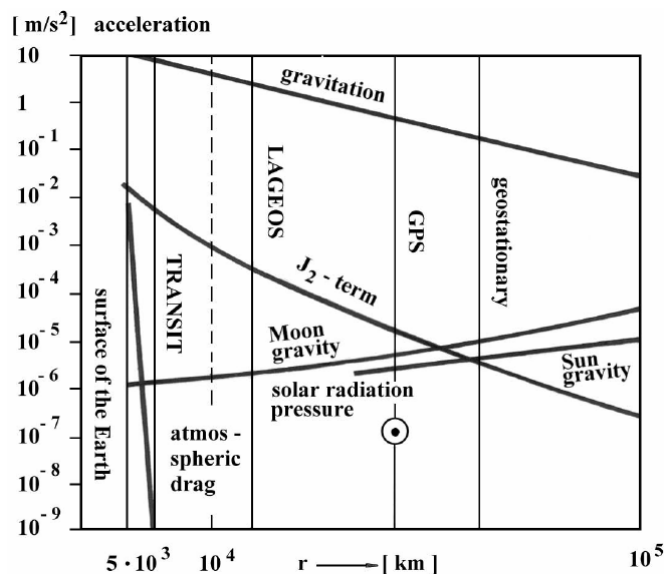
که در آن p بیانگر فشار تابش خورشید در امتداد خورشید و Y پارامتر اریبی نامیده می شود. دلیل حضور پارامتر اریبی به ناهنجاری های ساختاری ماهواره و پدیده حرارتی می باشد. وجود چنین پارامتری بیانگر پیچیدگی مدلسازی دقیق فشار تشعشعات خورشیدی است. به هر حال چنانچه نیاز به مدارات خیلی دقیق و به تبع آن تعیین موقعیت های خیلی دقیق باشد، باید تا حد امکان فشار تشعشعات خورشیدی را مدلسازی نمود.



نگاره ۹- دستگاه مختصات محلی برای فشار تابش خورشیدی

اثرات نیروهای اغتشاشی بر روی مدارات ماهواره ها

اثر نیروهای اغتشاشی مورد بحث در بخش های قبلی بر روی حرکات مداری ماهواره های مورد استفاده در ژئودزی ماهواره ای برای برخی از سامانه ها در نگاره (۱۰) نمایش داده شده است. همانطور که در نگاره پیداست، اثر نیروهای اغتشاشی مختلف بر حسب ارتفاع مداری متغیر است.



نگاره ۱۰- ارتباط نیروهای اغتشاشی و ارتفاع مداری ماهواره های مورد استفاده در ژئودزی ماهواره ای

به عنوان مثال، ماهواره های TRANSIT، ماهواره های سنسجش از راه دور مانند SPOT و LANDSAT، و ماهواره های ارتفاع سنجی ماهواره ای نظیر GEOS-3، SEASAT-1 و ERS-1/2 در ارتفاع مداری ۱۰۰۰ کیلومتری بالای سطح زمین قرار گرفته اند. ماهواره های فاصله یابی لیزری ماهواره ای مانند LAGEOS-1 و LAGEOS-2 در ارتفاع مداری ۶۰۰۰ کیلومتر از سطح زمین و ماهواره های GPS و GLONASS نیز در ارتفاع مداری ۲۰۰۰۰ کیلومتری از سطح زمین قرار دارند. بنابراین اثر نیروهای اغتشاشی مختلف بر روی این دسته ماهواره ها متفاوت می باشد و باید برای هر کدام به صورت جداگانه این اثرات محاسبه و اعمال شوند.

برای درک بهتر موضوع در جدول (۲) اثر نیروهای اغتشاشی بر روی مدار ماهواره های GPS و در جدول (۳) اثر نیروهای اغتشاشی بر روی پارامترهای مداری ماهواره های GPS برای یک مدار کپلری و مدار واقعی پس از گذشت ۴ ساعت فهرست شده است.

جدول ۲- اثر نیروهای اغتشاشی بر روی مدار ماهواره های GPS (King et al., 1987)

Perturbation	Acceleration m/s ²	Effect on the orbit	
		2 ^h -orbit	3-days orbit
Central force (for comparison)	0.56		
C_{20}	$5 \cdot 10^{-5}$	2 km	14 km
Further harmonics	$3 \cdot 10^{-7}$	50–80 m	100–1500 m
Solar & Lunar gravitation	$5 \cdot 10^{-6}$	5–150 m	1000–3000 m
Body tides	$1 \cdot 10^{-9}$	–	0.5–1.0 m
Ocean Tides	$1 \cdot 10^{-9}$	–	0.0-2.0 m
Solar radiation pressure	$1 \cdot 10^{-7}$	5–10 m	100–800 m
Albedo	$1 \cdot 10^{-9}$	–	1.0–1.5 m

جدول ۳- اثر نیروهای اغتشاشی بر روی عناصر کپلری ماهواره های GPS پس از ۴ ساعت (Nakiboglu et al., 1985)

Element	C_{20}	Higher order geopotential	Sun Moon	Solar radiation pressure
a	2600 m	20 m	220 m	5 m
e	1600 m	5 m	140 m	5 m
i	800 m	5 m	80 m	2 m
Ω	4800 m	3 m	80 m	5 m
$\omega + \bar{M}$	1200 m	4 m	500 m	10 m

فصل پنجم

ساختار سیگنال ها و مشاهدات ماهواره ای

در سامانه های تعیین موقعیت ماهواره ای که عموماً سامانه های یک طرفه هستند، هر ماهواره از طریق نوسان سازهای دقیقی تعدادی موج الکترومغناطیسی تولید و پس از عملیات مدولاسیون به منظور ترکیب امواج حامل، امواج کد و پیام های ناوبری (دریافتی از ایستگاه کنترل زمینی)، آنها را به سوی زمین گسیل می کند. پس از دریافت سیگنال های ترکیبی در گیرنده های تعیین موقعیت ماهواره ای، امواج حامل، امواج کد و پیام های ناوبری جداسازی می شوند و بر اساس اطلاعات موجود در پیام های ناوبری می توان به کمک امواج حامل و امواج کد، فاصله بین گیرنده زمینی و ماهواره را در هر لحظه محاسبه و نهایتاً به تعیین موقعیت ایستگاه های زمینی پرداخت. فاصله بین گیرنده زمینی و ماهواره بر پایه روش های سنجش همبستگی بین سیگنال های همسان تولیدی در گیرنده با سیگنال های دریافتی از ماهواره بدست می آید. چنانچه فاصله بین گیرنده زمینی و ماهواره از طریق اندازه گیری زمان بین ارسال و دریافت امواج کد بدست آید، در این صورت به آن فاصله کدی گویند و اگر از طریق اندازه گیری اختلاف فاز امواج حامل بدست آید، در این صورت به آن فاصله فازی گویند.

مفاهیم امواج الکترومغناطیسی

یک موج الکترومغناطیسی از دیدگاه ریاضی به سادگی با یک معادله سینوسی یا کسینوسی بر حسب زمان به صورت زیر قابل بیان است.

$$S(t) = A \cos(\varphi(t) + \varphi(t_0)) = A \cos(\omega t + \varphi(t_0)) = A \cos(2\pi f t + \varphi(t_0)) \quad (1)$$

که در آن A دامنه، $\varphi(t)$ فاز لحظه ای، $\varphi(t_0)$ فاز اولیه، ω سرعت زاویه ای، f فرکانس و t زمان است. بنابراین می توان روابط زیر را بین فرکانس (f)، دوره تناوب (T)، سرعت انتشار امواج

الکترومغناطیسی ($c = 299792458 \text{ms}^{-1}$)، طول موج (λ)، سرعت زاویه ای (ω) و فاز لحظه ای $\varphi(t)$ نوشت.

$$f = \frac{1}{T} = \frac{c}{\lambda} \quad (۲)$$

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} \quad (۳)$$

$$\varphi(t) = \omega t \quad (۴)$$

چنانچه فاز لحظه ای را بر حسب دور بنویسیم، رابطه (۴) به صورت زیر بازنویسی خواهد شد.

$$\varphi(t) = ft \quad (۵)$$

با توجه به رابطه (۵) می توان فرکانس لحظه ای به صورت مشتق فاز نسبت به زمان بدست آورد.

$$f = \frac{d\varphi}{dt} \quad (۶)$$

حال با انتگرال گیری از رابطه (۶) بین زمان های t_0 و t به رابطه زیر می رسیم.

$$\varphi(t) - \varphi(t_0) = \int_{t_0}^t f dt \quad (۷)$$

با فرض ثابت بودن فرکانس و صفر قرار دادن فاز اولیه ($\varphi(t_0) = 0$) و با در نظر گرفتن مدت زمانی که سیگنال از ماهواره تا گیرنده طی می کند (t_p)، معادله فاز برای امواج الکترومغناطیسی در گیرنده زمینی به صورت زیر خواهد بود.

$$\varphi(t) = f(t - t_p) = f\left(t - \frac{\rho}{c}\right) = ft - \frac{\rho}{\lambda} \quad (8)$$

به عنوان مثال در حالت $f = 1.5\text{GHz}$ و $\rho = 20000\text{km}$ و فرض $3 \times 10^5 \text{ kms}^{-1}$ برای سرعت انتشار امواج الکترومغناطیسی، فاز لحظه ای در ایستگاه زمینی 10^8 دور بدست می آید. در صورتیکه گیرنده زمینی یا ماهواره در حال حرکت باشند یا به عبارت دیگر یک حرکت نسبی بین گیرنده زمینی و ماهواره با سرعت شعاعی v_p یا تغییر فاصله بین ماهواره و گیرنده ($\dot{\rho}$) وجود داشته باشد، در این صورت بنا بر اصل داپلر فرکانس ارسالی در ماهواره (f^s) با فرکانس دریافتی در گیرنده (f_r) به اندازه Δf اختلاف دارد.

$$\Delta f = f_r - f^s = -\frac{1}{c} v_p f^s = -\frac{1}{c} \dot{\rho} f^s \quad (9)$$

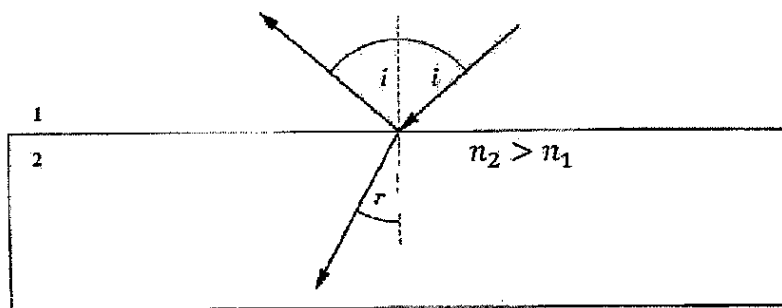
این اختلاف موسوم به "داپلر شیفت" می باشد که تابعی از سرعت و جهت حرکت ماهواره نسبت به گیرنده است.

برای مثال می توان با فرض سرعت مداری متوسط 3.9kms^{-1} برای ماهواره های GPS، ثابت بودن گیرنده و چشم پوشی از چرخش زمین، داپلر شیفت در نزدیکترین موقعیت ماهواره به دلیل صفر بودن سرعت شعاعی برابر صفر است. حداکثر سرعت شعاعی ماهواره های GPS در زمان عبور از افق است که به حدود 0.9kms^{-1} می رسد. در این حالت با در نظر گرفتن $f^s = 1.5\text{GHz}$ ، داپلر شیفت به حدود 4.5KHz می رسد که معادل 4.5 دور در یک میلی ثانیه یا عبارت بهتر 90 سانتی متر در فاصله می باشد.

بر اساس تقسیم بندی انجام شده توسط اتحادیه بین المللی ارتباطات دور (ITU) امواج الکترومغناطیسی مورد استفاده در تعیین موقعیت ماهواره ای در باندهای S، C و L در محدوده فرکانس UHF قرار دارند. باندهای S، C و L در بر گیرنده فرکانس های 1GHz تا 8GHz می باشد. نوع دیگری از دسته بندی امواج الکترومغناطیسی به سه صورت امواج زمینی، امواج آسمانی و امواج مستقیم است. امواج زمینی به امواجی با فرکانس کمتر از 1.6MHz اطلاق می شود که مسیر انتشار آنها از انحنای زمین تبعیت می کند. امواج آسمانی به امواجی با فرکانس در محدوده 1.6MHz تا 30MHz اطلاق می شود که در برخورد با لایه یونسفر منعکس می شوند. امواج مستقیم به امواجی با فرکانس بیشتر از 30MHz اطلاق می شود که مسیر انتشار آنها تقریباً مستقیم می باشد و از لایه یونسفر نیز عبور می کنند.

انتشار امواج الکترومغناطیسی

امواج الکترومغناطیسی پس از انتشار در محیط اول در صورت برخورد با یک سطح قسمتی از آن به صورت متقارن نسبت به عمود بر سطح منعکس و بخشی نیز، بسته به ضریب شکست محیط دوم، با راستایی متفاوت مسیر خود را ادامه می دهد (نگاره ۱). بر همین اساس هنگام برخورد امواج الکترومغناطیسی به سطوح منعکس کننده در نزدیکی گیرنده ها با پدیده چندمسیری مواجه می شویم.



نگاره ۱- انعکاس و شکست امواج در برخورد با محیط دوم

امواج الکترومغناطیسی در گذر از اتمسفر زمین با محیط های مختلفی با ضریب شکست های متفاوت برخورد می کند. همانطور که از قبل می دانیم برای هر دو محیط با ضریب شکست های n_1 و n_2 رابطه زیر برقرار است که بیانگر ثابت بودن نسبت ضریب شکست دو محیط می باشد.

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1} = cte \quad (10)$$

که در آن i زاویه تابش و r زاویه شکست است. چنانچه سرعت موج را در هر محیط دلخواهی با v_i نمایش دهیم، نسبت سرعت موج در خلاء (c) به سرعت v_i را ضریب شکست محیط (n_i) می نامیم.

$$n_i = \frac{c}{v_i} \quad (11)$$

رابطه فوق به روشنی نشان می دهد که ضریب شکست خلاء برابر با یک است. ضریب شکست تابعی از دما، فشار، بخار آب، فرکانس موج و تعداد الکترون های آزاد محیط انتشار است. محیط های پاشنده به محیط هایی اطلاق می گردد که سرعت فاز و در نتیجه ضریب شکست تابعی از فرکانس موج است. به طور مثال لایه یونسفر برای فرکانس $1.5GHz$ یک محیط پاشنده می باشد در حالیکه لایه تروپوسفر برای همین فرکانس اینگونه نیست.

توان امواج الکترومغناطیسی از زمان انتشار تا زمان دریافت بسته به فرکانس، فاصله بین فرستنده و گیرنده و خصوصیات محیط انتشار دچار افت می شود. چنانچه توان موج ارسالی در ماهواره را با P^s و توان موج دریافتی در گیرنده را با P_r نمایش دهیم، نسبت P_r/P^s بیانگر تضعیف یا بهره موج است. اگر این نسبت کمتر از یک باشد با افت یا تضعیف مواجه هستیم و چنانچه بیشتر از یک باشد با بهره که در مقابل تضعیف بکار برده می شود، مواجه می باشیم. معمولاً نسبت فوق را بر حسب واحد دسی بل (dB) با رابطه زیر تعریف می کنند.